

Л. С. АТАНАСЯН

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для студентов-заочников
физико-математических факультетов
педагогических институтов

УЧПЕДГИЗ-1963

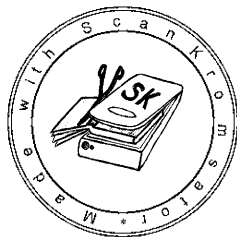
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Л. С. АТАНАСЯН

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для студентов-заочников
физико-математических факультетов
педагогических институтов

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ДОПОЛНЕННОЕ И ИСПРАВЛЕННОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1963

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Курс аналитической геометрии, читаемый на физико-математических факультетах педагогических институтов, играет весьма важную роль в формировании учителя математики и физики. Этот курс, наряду с курсом математического анализа, вооружает учителя математики мощным аппаратом математического исследования. Глубокое изучение аналитической геометрии необходимо не только для расширения математического кругозора учителя. Знание теоретического материала, умение решать задачи необходимо для сознательного усвоения многих других специальных дисциплин, в первую очередь курсов математического анализа, физики, особенно механики. Трудно назвать такую специальную дисциплину, изучаемую студентом в пединституте, в которой не использовались бы те или иные положения аналитической геометрии.

При прохождении курса аналитической геометрии существенное значение имеет приобретение навыков в решении задач. Проработка теоретического материала должна сопровождаться решением большого количества разнообразных задач. Это условие является необходимым для сознательного усвоения курса и успешной сдачи зачетов и экзаменов.

Известно, что количество часов, отводимое на экзаменационных сессиях для изучения курса аналитической геометрии и особенно для решения задач, совершенно недостаточно. Студенту-заочнику в межсессионный период необходимо самостоятельно изучить значительную часть теоретического материала и приобрести навыки в решении задач. При этом самостоятельно овладеть теоретической частью курса зачастую бывает легче, чем научиться решать задачи.

На первых порах учащиеся испытывают большие трудности при подборе необходимого минимума задач; большие затруднения вызывает и методика их решения. Следует также учесть, что существующие задачки по аналитической геометрии ([12], [14], [16]¹ и др.), написанные для студентов технических вузов и университетов, содержат мало задач, имеющих профессиональную направленность и способствующих подготовке учителя математики. Между тем курс аналитической геометрии имеет непосредственное отношение к профессиональной подготовке учителя и к его работе в школе.

Настоящий задачник-практикум составлен в соответствии с действующей программой курса аналитической геометрии для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов по специальности «математика» и охватывает всю программу курса.

Задачник-практикум предназначен для студентов-заочников первых курсов специальности «математика» и студентов-заочников третьих курсов, окончивших учительские институты и изучающих дополнительные главы аналитической геометрии. Он может быть использован также для контроля за самостоятельной работой студентов-заочников. Вместо текстов контрольных работ студенту-заочнику можно направлять индивидуальное задание с указанием номеров задач из задачника-практикума.

При составлении задачника-практикума учтен опыт чтения этого курса в Московском государственном заочном педагогическом институте и в Московском государственном педагогическом институте имени В. И. Ленина.

В настоящем пособии отобран минимум задач и упражнений, который необходимо решить студенту-заочнику в межсессионный период. В задачнике-практикуме дано решение наиболее типичных задач. Кроме того, уделено большое внимание подбору задач элементарной геометрии, решаемых методами аналитической геометрии. Эти задачи, как правило, выделены в отдельные параграфы.

При составлении задачника использована учебная литература по аналитической геометрии, список которой помещен на стр. 234—235.

¹ Здесь и в дальнейшем цифры в прямых скобках относятся к списку литературы, помещенному в конце книги.

Во втором издании задачника-практикума автор стремился исправить опечатки и устранить недостатки, имевшиеся в первом издании. Одним из недостатков первого издания было сравнительно небольшое количество простых задач в ряде параграфов. Этот пробел по возможности восполнен во втором издании. Дополнительно введены свыше ста задач и упражнений по темам: координаты точек на плоскости и в пространстве, расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении, теория прямой линии, упрощение уравнения кривой второго порядка, задачи на сочетание прямой и плоскости и другим.

Во втором издании порядок расположения материала оставлен прежний. Задачник состоит из двух частей: часть I — геометрия на плоскости и часть II — геометрия в пространстве. В каждой части задачи, относящиеся к определенной теме, объединены в параграфы.

В начале каждого параграфа указывается литература, которую следует изучить, прежде чем приступить к решению задач. Литература указывается по трем учебникам: [1] С. В. Бахвалов и др., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1958; [2] А. М. Лопшиц, Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1948; [3] П. С. Моденов, Аналитическая геометрия, изд. МГУ, 1955. Для того чтобы не распылять своего внимания, студенту-заочнику рекомендуем избрать в качестве основного один какой-либо учебник, только в тех случаях, когда данный вопрос в учебнике изложен недостаточно ясно или слишком сжато, следует обращаться к другим пособиям.

Большую помощь автору в составлении задачника-практикума оказала доцент Московского областного педагогического института имени Н. К. Крупской В. П. Иваницкая. Ею полностью написаны § 43—46, 48—50, а также дан ряд ценных указаний и советов. В редактировании рукописи и в подготовке ее ко второму изданию принимала участие доцент Московского государственного заочного педагогического института В. А. Атанасян. Указанным лицам автор приносит благодарность.

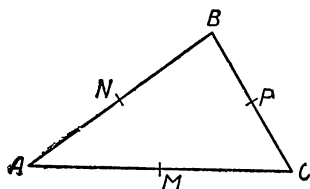
Глава I

АФФИННЫЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ НА ПЛОСКОСТИ
И В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Сложение и вычитание векторов

Литература: [1], часть I, § 13 — 15; [2], глава I, п. 1—19; [3], § 16—17.

1. Пусть ABC — произвольный треугольник, а M , N , P — соответственно середины сторон AC , AB и BC (черт. 1). Указать, какие из следующих пар векторов равны и какие коллинеарны:



Черт. 1.

- а) \overline{AN} и \overline{MP} ;
- б) \overline{NP} и \overline{CA} ;
- в) \overline{BM} и \overline{PC} ;
- г) \overline{PC} и \overline{BC} ;
- д) \overline{NB} и \overline{MP} .

Решение. Два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} называются *равными*, если выполнены следующие три условия: 1) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$; 2) вектор \mathbf{a} коллинеарен вектору \mathbf{b} ; 3) векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} сонаправлены. Отметим, что если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то векторы не равны.

а) Векторы \overline{AN} и \overline{MP} равны, так как они удовлетворяют всем трем условиям. В самом деле, $AN = MP$ в силу того, что MP средняя линия треугольника ABC . Векторы \overline{AN} и \overline{MP} коллинеарны благодаря тому, что средняя линия MP треугольника ABC параллельна стороне AB . Из чертежа 1 видно, что рассматриваемые векторы сонаправлены.

б) Векторы \overline{NP} и \overline{CA} коллинеарны, так как NP сред-

няя линия треугольника ABC . Но $\overline{NP} \neq \overline{CA}$ хотя бы потому, что $NP \neq CA$. Таким образом, условие 1) равенства векторов не выполняется. Из чертежа 1 видно, что условие 3) также не выполняется.

в) Векторы \overline{BM} и \overline{PC} не коллинеарны, так как прямые BM и PC пересекаются в точке B . Отсюда следует, что $\overline{BM} \neq \overline{PC}$ (не выполняется условие 2).

г) Легко убедиться в том, что векторы \overline{PC} и \overline{BC} коллинеарны, но не равны.

д) Векторы \overline{NB} и \overline{MP} равны, так как выполнены все три условия равенства векторов.

Аналогично решите следующую задачу.

2. Начертите параллелограмм $ABCD$ и обозначьте через O точку пересечения диагоналей. Укажите, какие из следующих пар векторов равны, а какие коллинеарны, но не равны: а) \overline{AB} и \overline{CD} ; б) \overline{AB} и \overline{DC} ; в) \overline{BC} и \overline{CB} ; г) \overline{AO} и \overline{BC} ; д) \overline{OA} и \overline{CO} .

3. Будут ли выполнены свойства рефлексивности, транзитивности и симметричности для понятия равенства векторов, если оно введено так:

а) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются «равными», если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.

б) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются «равными», если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и они образуют угол $\varphi = 120^\circ$.

в) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются «равными», если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и они либо коллинеарны, либо перпендикулярны.

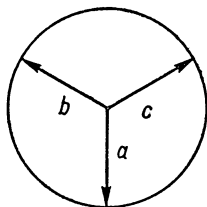
г) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются «равными», если $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$.

д) Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются «равными», если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ и они либо коллинеарны, либо образуют угол 30° .

Решение. Как известно, понятие равенства удовлетворяет условиям *рефлексивности* (каждый вектор равен самому себе), *симметричности* (если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, то $\mathbf{b} = \mathbf{a}$) и *транзитивности* (если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{c}$). Выясним, будут ли выполнены эти требования, если понятие равенства векторов ввести не обычным путем, а так, как указано в пп. а)–д). Рассмотрим первые два случая; остальные случаи предоставим студенту-заочнику разобрать самостоятельно.

а) Любые два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} называются «равными», если их длины (модули) равны. При этом определении, очевидно, будут выполнены все три требования. В самом деле, пусть \mathbf{a} — произвольный вектор. Так как $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$, то

по нашему определению $a \equiv a^1$. С другой стороны, если $a \equiv b$, то по определению $|a| = |b|$. Но понятие равенства чисел ($|a|$ и $|b|$ являются числами!) удовлетворяет условию симметричности, поэтому $|b| = |a|$. Отсюда, в силу нашего определения, получаем: $b \equiv a$.



Черт. 2.

Точно так же убеждаемся в том, что выполнено требование транзитивности.

б) Два вектора a и b называются «равными», если $|a| = |b|$ и они образуют угол $\varphi = 120^\circ$. При таком определении условие рефлексивности не выполнено, так как если a — произвольный вектор, модуль которого не равен нулю, то $\angle(a, a) \neq 120^\circ$.

Условие симметричности при этом определении всегда выполняется, а транзитивности — не всегда. В самом деле, если $a \equiv b$, то $|a| = |b|$ и $\angle(a, b) = 120^\circ$. Но тогда $|b| = |a|$ и $\angle(b, a) = 120^\circ$ и, следовательно, $b \equiv a$ (черт. 2).

Если $a \equiv b$, $b \equiv c$ и векторы a и c не совпадают, то $a \equiv c$, так как оба условия «равенства» выполнены (черт. 2). Если же $a \equiv b$, $b \equiv c$ и векторы a и c совпадают, то $a \neq c$.

Предоставляем студенту самостоятельно убедиться в том, что в случае в) все три требования выполняются, а в каждом из случаев г) и д) отдельные из них не выполняются.

4. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей, а E и F — соответственно середины параллельных сторон BC и AD . Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overline{AB} + \overline{DC}$; б) $\overline{AE} + \overline{DF}$; в) $\overline{AO} - \overline{AB}$; г) $\overline{OC} + \overline{CD} + \overline{OB}$; д) $\overline{ED} + \overline{FA} + \overline{FO}$; е) $\overline{AB} + \overline{BE} - \overline{OE} + \overline{CD}$.

5. Пусть a и b — произвольные векторы. Показать, что $|a + b| \leq |a| + |b|$. При каких условиях в этом соотношении имеет место знак равенства?

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда векторы a и b не коллинеарны. Пусть $\overline{OA} = a$ и $\overline{AB} = b$ (черт. 3, а), тогда $\overline{OB} = a + b$. В силу неколлинеарно-

¹ Знак « \equiv » здесь применяется для обозначения «равенства» векторов в новом смысле.

сти векторов a и b точки O , A и B не лежат на одной прямой, поэтому $OA + AB < OB$ («сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны»). Таким образом, $|a| + |b| > |a + b|$.

Если хотя бы один из векторов a или b равен 0 , то, очевидно, $|a + b| = |a| + |b|$. В самом деле, если, например, $b = 0$, то $|a + b| = |a + 0| = |a| + |0| = |a| + |b|$.

Остается рассмотреть случай, когда векторы a и b не нулевые, но коллинеарные. Если a и b сонаправлены, то точка O не будет лежать между A и B (черт. 3, б), поэтому $|a| + |b| = |a + b|$. Если a и b имеют противоположные направления, то точки O и B будут лежать по одну и ту же сторону от точки A (черт. 3, в), поэтому $OB < OA + AB$, т. е. $|a + b| < |a| + |b|$.

Таким образом, приходим к выводу:

а) если векторы a и b не коллинеарны или коллинеарны, но имеют противоположные направления, то

$$|a + b| < |a| + |b|;$$

б) если векторы a и b сонаправлены или хотя бы один из них нулевой вектор, то

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

6. Показать, что $|a - b| \leq |a| + |b|$. При каких условиях в этом соотношении имеет место знак равенства?

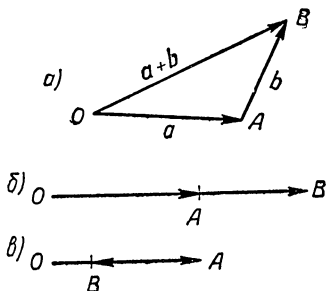
7. Если a и b — данные векторы, то при каких условиях векторы $a + b$ и $a - b$ коллинеарны?

8. Изображая векторы $a + b$ и $a - b$ с помощью диагоналей параллелограмма, найти условия, при которых

$$|a + b| = |a - b|.$$

9. Написать векторные равенства, связывающие векторы, изображенные на чертежах 4, а), б), в).

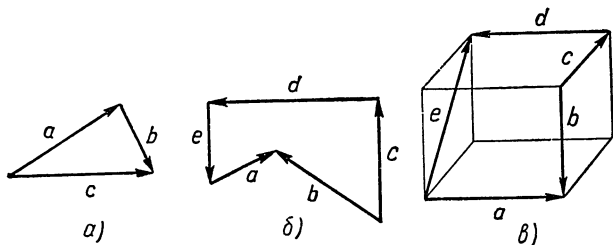
10. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, O — его центр. Зная $\overrightarrow{OA} = a$ и $\overrightarrow{OB} = b$, выразить \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OF} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{ED} , \overrightarrow{EC} , \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{DA} через векторы a и b .



Черт. 3.

§ 2. Умножение вектора на число; смешанные задачи

Литература: [1], часть 1, § 16; [2], глава I, п. 10—12; [3], § 18.

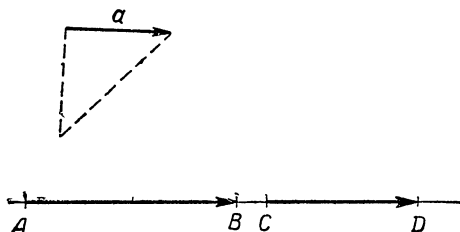


Черт. 4.

11. Начертить произвольный вектор a и построить векторы:

$$2a, -2a, \sqrt{2}a, \frac{1}{2}a, -\frac{3}{5}a, \frac{3}{4}a, 5a, -\sqrt{3}a.$$

Решение. Произведением вектора a на число α на-



Черт. 5.

зывается вектор p , удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|p| = |\alpha| |a|$;

б) если $\alpha > 0$ и $a \neq 0$, то векторы p и a коллинеарны и сонаправлены; если $\alpha < 0$ и $a \neq 0$, то векторы p и a коллинеарны и имеют противоположные направления;

в) если $\alpha = 0$ или $a = 0$, то $p = 0$.

Пользуясь этим определением, построим векторы $2a$, $-2a$ и $\sqrt{2}a$. Для этой цели возьмем прямую, параллельную вектору a , и на ней отложим отрезки $AB = 2|a|$, $CD = \sqrt{2}|a|$, где $|a|$ — длина вектора a (черт. 5).

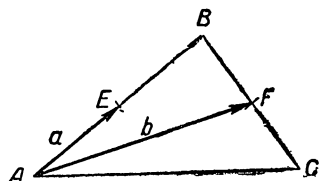
Для отыскания отрезка CD достаточно построить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным $|a|$. Гипотенуза этого треугольника, очевидно, равна $\sqrt{2}|a|$. Легко понять, что $2a = \overline{AB}$, $-2a = \overline{BA}$, а $\sqrt{2}a = \overline{CD}$.

Предлагаем учащемуся аналогично построить остальные векторы.

12. По данным векторам a и b построить каждый из следующих векторов:

$$4a, \quad -\frac{1}{2}(b+a), \quad 2a + \frac{1}{4}b, \quad 3a - \frac{1}{3}b, \quad a + \sqrt{3}b.$$

13. Пусть ABC — произвольный треугольник, а E и F — середины сторон AB и BC . Выразить векторы \overline{AB} , \overline{BC} и \overline{AC} через $a = \overline{AE}$ и $b = \overline{AF}$.



Черт. 6.

Решение. Так как точка E — середина стороны AB , то $\overline{AB} = 2\overline{AE} = 2a$ (черт. 6). Далее,

$$\overline{BC} = 2\overline{BF} = 2(\overline{AF} - \overline{AB}) = 2(b - 2a) = 2b - 4a.$$

Из правила треугольника следует, что

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AF} + \frac{1}{2}\overline{BC} = b + b - 2a = 2(b - a).$$

Таким образом,

$$\overline{AB} = 2a, \quad \overline{BC} = 2(b - 2a), \quad \overline{AC} = 2(b - a).$$

Легко проверить справедливость полученных результатов. В самом деле,

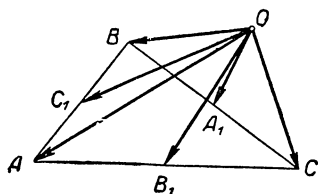
$$\overline{AB} + \overline{BC} = 2a + 2b - 4a = 2b - 2a = \overline{AC}.$$

14. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, а O — точка пересечения его диагоналей. Полагая $\overline{AO} = a$ и $\overline{BO} = b$, выразить через a и b векторы \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} и \overline{DA} .

15. В тетраэдре $ABCD$ точка E лежит на ребре AB и делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = 3$. Полагая $a =$

$= \overline{AE}$, $\mathbf{b} = \overline{AC}$ и $\mathbf{c} = \overline{AD}$, выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} векторы \overline{BD} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{ED} и \overline{EC} .

16. Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, \dots, C_{n-1} на n равных частей. Зная $\overline{OA} = \mathbf{a}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$, выразить через них векторы $\overline{OC_1}, \overline{OC_2}, \dots, \overline{OC_{n-1}}$. Здесь O — произвольная точка плоскости.



Черт. 7.

17. В плоскости треугольника ABC взята произвольная точка O (черт. 7). A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB . Показать, что равнодействующая сил $\overline{OA}, \overline{OB}$ и \overline{OC} равна равнодействующей сил $\overline{OA_1}, \overline{OB_1}, \overline{OC_1}$.

18. Определить векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} из следующей системы уравнений:

$$\mathbf{x} + 2\mathbf{y} = 2\mathbf{a}.$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = 2\mathbf{b},$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — данные векторы.

Решение. Имеем два линейных векторных уравнения с двумя векторными неизвестными \mathbf{x} и \mathbf{y} . Так как свойства суммы, разности и умножения вектора на число формально совпадают с аналогичными свойствами числовых операций, то для решения векторных уравнений можно пользоваться теми же приемами, что и при решении линейных уравнений в алгебре.

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + 2\mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}) + (2\mathbf{y} + \mathbf{y}) &= 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, \end{aligned}$$

откуда $\mathbf{y} = \frac{2}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$

Подставив значение \mathbf{y} во второе уравнение данной системы, получаем: $\mathbf{x} = \mathbf{y} + 2\mathbf{b} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b}$. Таким образом,

$$\mathbf{x} = \frac{2}{3}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}); \quad \mathbf{y} = \frac{2}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что полученные значения \mathbf{x} и \mathbf{y} удовлетворяют данной

системе векторных уравнений. Очевидно, полученное решение единственное.

19. Определить векторы x , y и z из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4a, \\ 3x + 4y - 2z &= 11a, \\ 3x - 2y + 4z &= 11b. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Последовательно исключив переменные y и z , сначала найти x .

20. Упростить выражения:

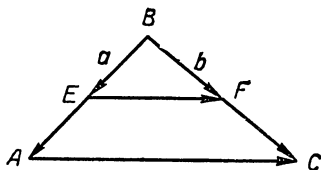
- 1) $3a - 4b - (3a + 4b)$;
- 2) $\cos \alpha \cos \beta a - \sin \alpha \sin \beta a$;
- 3) $(\alpha - \beta)(a + b) - (\alpha + \beta)(a - b)$.

§ 3. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии

Литература: [2], глава II, § 1, п. 13—19.

21. Доказать, что средняя линия треугольника равна половине основания и параллельна ей.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — произвольный треугольник, E — середина AB и F — середина BC (черт. 8). Положив $\overline{BE} = a$ и $\overline{BF} = b$, выразим векторы \overline{EF} и \overline{AC} через a и b .



Черт. 8.

Из треугольников BEF и BAC получаем: $\overline{EF} = b - a$, $\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA} = 2(b - a)$. Отсюда $\overline{AC} = 2\overline{EF}$.

Задача решена, так как из полученного соотношения непосредственно следует, что $AC = 2EF$ и $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$.

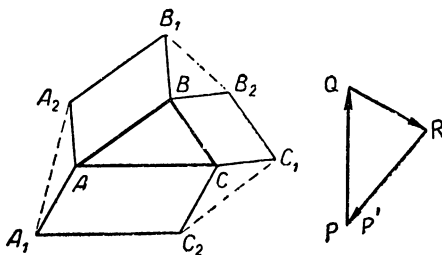
Аналогичным методом решите следующие две задачи.

22. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

23. Доказать, что если $ABCD$ пространственный четырехугольник (т. е. вершины A , B , C и D не обязательно лежат в одной плоскости), то $\overline{AB} + \overline{DC} = 2\overline{EF}$, где AB

и DC — противоположные стороны, а E и F — соответственно середины сторон AD и BC ¹.

24. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллелограммы ABB_1A_2 , BCC_1B_2 и ACC_2A_1 . Доказать, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам: A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 .



Черт. 9.

Решение. На чертеже 9 изображен треугольник ABC с построенными на сторонах параллелограммами. Для решения задачи достаточно показать, что

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0. \quad (1)$$

В самом деле, если равенство (1) имеет место, то, взяв произвольную точку P плоскости и построив ломаную $PQRP'$ так, чтобы $\overline{PQ} = \overline{A_1A_2}$; $\overline{QR} = \overline{B_1B_2}$ и $\overline{RP'} = \overline{C_1C_2}$, получим, что точка P' совпадает с точкой P , т. е. ломаная $PQRP'$ образует $\triangle PQR$, стороны которого соответственно равны и параллельны отрезкам A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 .

Для доказательства соотношения (1) рассмотрим треугольники AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 и выразим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ и $\overline{C_1C_2}$ через другие стороны соответственных треугольников. Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} &= \overline{AA_2} - \overline{AA_1}, & \overline{B_1B_2} &= \overline{BB_2} - \overline{BB_1}, \\ \overline{C_1C_2} &= \overline{CC_2} - \overline{CC_1}. \end{aligned}$$

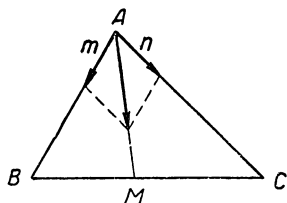
Из этих соотношений, учитывая, что $\overline{AA_2} = \overline{BB_1}$, $\overline{BB_2} = \overline{CC_1}$ и $\overline{CC_2} = \overline{AA_1}$, получаем $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 0$. Задача решена.

¹ Эта задача по существу является обобщением предыдущей.

Аналогично решите следующие две задачи.

25. Дан произвольный треугольник ABC . Доказать, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам исходного треугольника.

26. Из медиан треугольника ABC построен новый треугольник $A_1B_1C_1$; из его медиан — треугольник $A_2B_2C_2$. Показать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны; найти коэффициент подобия.



Черт. 10.

27. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону внутренним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Решение. Если m и n — единичные векторы, направленные соответственно вдоль сторон AB и AC , то вектор $m + n$ будет направлен вдоль биссектрисы AM (черт. 10). Так как $\overline{AB} \parallel m$, $\overline{AC} \parallel n$ и $\overline{AM} \parallel (m + n)$, то $\overline{AB} = cm$, $\overline{AC} = bn$ и $\overline{AM} = \lambda(m + n)$. В этих соотношениях c и b — соответственно длины сторон AB и AC и λ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Определим отношение $x = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}$. Имеем:

$$\overline{BM} = x\overline{MC},$$

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = \lambda(m + n) - cm = (\lambda - c)m + \lambda n,$$

$$\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = bn - \lambda(m + n) = -\lambda m + (b - \lambda)n.$$

Таким образом,

$$(\lambda - c)m + \lambda n = -\lambda x m + x(b - \lambda)n.$$

Так как векторы m и n не коллинеарны, то

$$\lambda - c = -\lambda x; \quad \lambda = x(b - \lambda).$$

Отсюда:

$$\lambda(1 + x) = c, \quad \lambda(1 + x) = xb.$$

Следовательно, $c = xb$ и $x = \frac{c}{b}$. Задача решена.

Точно так же решаются следующие две задачи.

28. Доказать, что биссектриса внешнего угла неравнобедренного треугольника делит противоположную сторону внешним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.

29. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $AM = k \cdot AD$. Прямая BM пересекает диагональ AC в точке P . Определить отношение $AP:AC$.

Указание. Полагая $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{AD} = \mathbf{b}$, выразить векторы \overline{AP} и \overline{AC} через \mathbf{a} и \mathbf{b} и записать условие их коллинеарности.

30. В плоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: 1) середины двух противоположных сторон; 2) середины двух других противоположных сторон; 3) середины диагоналей.

Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке P и каждый из них точкой P делится пополам.

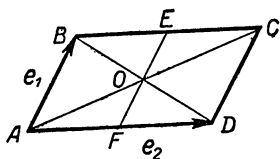
Глава II

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

§ 4. Координаты векторов и их свойства

Литература: [1], часть I, § 17, 18; [2], глава II, п. 21—24, 26; [3], § 19—22.

31. Пусть $ABCD$ —параллелограмм, E и F —середины противоположных сторон BC и AD , а O —точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overline{AB} = e_1$, $\overline{AD} = e_2$ за координатные, определить координаты следующих векторов: а) \overline{AC} ; б) \overline{OD} ; в) \overline{FC} ; г) \overline{BC} ; д) \overline{EO} ; е) \overline{BD} ; ж) \overline{EA} .



Черт. 11.

Решение. Координатами вектора называются коэффициенты разложения его по координатным векторам. При этом известно, что коэффициенты разложения не зависят от способа разложения, поэтому для решения задачи достаточно как и м-л и б о способом данные векторы разложить по координатным векторам e_1 и e_2 (черт. 11).

а) $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = e_1 + e_2$; отсюда следует, что $\overline{AC} \left\{ 1, 1 \right\}$;

б) $\overline{OD} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{AB}) = \frac{1}{2} (e_2 - e_1)$; отсюда следует, что $\overline{OD} \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$;

в) $\overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = e_1 + e_2 - \frac{1}{2} e_2 = e_1 + \frac{1}{2} e_2$; отсюда следует, что $\overline{FC} \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$.

Аналогично можно показать, что

$$\overline{BC} \{0, 1\}, \overline{EO} \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}, \overline{BD} \{-1, 1\}, \overline{EA} \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}.$$

Координаты вектора существенно зависят от выбора системы координат. Чтобы убедиться в этом, предлагаем:

32. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\overline{m_1} = \overline{AF}$, $\overline{m_2} = \overline{OD}$.

33. В треугольнике ABC проведены медиана BK и средняя линия $MN \parallel AC$; BK и MN пересекаются в точке O .

а) Найти координаты векторов \overline{CM} , \overline{OB} , \overline{KM} , \overline{CB} , \overline{NC} и \overline{AN} , принимая векторы \overline{OC} и \overline{OM} за координатные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 .

б) Найти координаты тех же векторов \overline{CM} , \overline{OB} , \overline{KM} , \overline{CB} , \overline{NC} и \overline{AN} , принимая векторы \overline{KC} и \overline{KN} за координатные векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 .

34. В равнобокой трапеции $ABCD$ угол A равен $\frac{\pi}{3}$.

Полагая $\overline{AB} = \mathbf{e}_1$ и $\overline{AD} = \mathbf{e}_2$, разложить по \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали.

У к а з а н и е. Пусть AB —большее основание трапеции. Сначала показать, что $\overline{CD} = \frac{b-a}{a} \mathbf{e}_1$, где $a = AB$, $b = AD$.

35. Взяв на плоскости аффинную систему координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, построить следующие векторы:

$$\mathbf{a}_1 \{1, 2\}, \mathbf{a}_2 \{2, -1\}, \mathbf{a}_3 \{0, -1\}, \mathbf{a}_4 \{\sqrt{2}, 3\}, \mathbf{a}_5 \{-1, -2\}, \\ \mathbf{a}_6 \{2, -1\}, \mathbf{a}_7 \{-1, -2\}, \mathbf{a}_8 \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}, \mathbf{a}_9 \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}, \mathbf{a}_{10} \{2, 0\}.$$

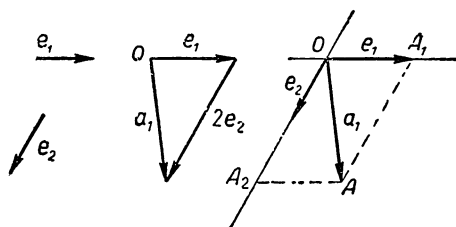
Решение. Для построения вектора по координатам $\{x, y\}$ в данной системе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ можно пользоваться двумя способами.

а) Выразить данный вектор \mathbf{a} через векторы координатной системы: $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ и, построив векторы $x\mathbf{e}_1, y\mathbf{e}_2$, построить вектор \mathbf{a} , пользуясь правилом сложения векторов.

б) Через произвольную точку O плоскости провести две прямые, параллельные соответственно векторам \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . От точки O на построенных прямых отложить направленные отрезки OA_1 и OA_2 , длины которых соответственно равны x и y . При этом за единицу измерения на пер-

вой прямой принимается отрезок OE_1 , а на второй прямой отрезок OE_2 , где E_1 и E_2 —концы векторов e_1 и e_2 , приложенных к точке O . Далее, на отрезках OA_1 и OA_2 построить параллелограмм OA_1AA_2 . Вектор \overline{OA} , направленный по диагонали параллелограмма, и будет искомым.

На чертеже 12 показано построение вектора a_1 . Левый чертеж соответствует первому способу построения, а



Черт. 12.

правый — второму. Векторы a_2, \dots, a_{10} построить самостоятельно.

Предлагаем студенту-заочнику составить и решить ряд аналогичных примеров с тем, чтобы приобрести твердые навыки в построении векторов по координатам.

36. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат i, j , построить векторы предыдущего примера.

37. На плоскости даны два вектора $u \{2, 1\}, v \{1, 0\}$. Найти коэффициенты разложения вектора $a \{9, 1\}$ по векторам u и v .

Решение. Пусть $a = \alpha u + \beta v$. Определим коэффициенты α и β . Для этой цели воспользуемся теоремой о координатах линейной комбинации векторов (см. [2], п. 24). По этой теореме каждая координата вектора a равна той же линейной комбинации соответствующих координат векторов u и v , поэтому

$$9 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1, \quad 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0.$$

Отсюда получаем: $\alpha = 1, \beta = 7$. Таким образом, вектор a имеет вид: $a = u + 7v$.

Проверка. Если $a \{x, y\}$, то по теореме о координатах линейной комбинации векторов $x = 2 + 7 \cdot 1 = 9, y = 1 + 7 \cdot 0 = 1$. Задача решена правильно.

38. Даны три вектора $u \{3, -2\}, v \{-2, 1\}, w \{7, -4\}$. Определить коэффициенты разложения каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

39. Даны векторы $u \{3, -1\}$, $v \{1, -2\}$, $w \{-1, 7\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $p = u + v + w$ по векторам u и v .

40. Даны векторы $a \{2, 3\}$, $b \{1, -3\}$ и $c \{-1, 3\}$. При каком значении коэффициента α векторы $p = a + \alpha b$ и $q = a + 2c$ коллинеарны?

У к а з а н и е. Выразить координаты векторов $p \{x_1, y_1\}$ и $q \{x_2, y_2\}$ через координаты векторов a и b и воспользоваться условием коллинеарности: $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$.

41. Даны векторы $a \{2, -3\}$, $b \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$. При каких значениях коэффициента α будут коллинеарны следующие пары векторов:

а) $p = a + \alpha b$ и $q = a - \alpha b$;

б) $p = \alpha a + b$ и $q = a + \alpha b$;

в) $p = \alpha a + b$ и $q = a$.

42. Даны векторы $a \{1, -2\}$, $b \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$, $c \{2, 0\}$.

Определить координаты векторов:

$$\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}c, \frac{3a-5b}{2}, \frac{c-2b}{3}.$$

43. Даны векторы $a \{-1, -2\}$, $b \{3, -5\}$, $c \{4, -3\}$. Существует ли треугольник ABC , стороны AB , BC , CA которого соответственно параллельны векторам a , b , c и для которого $AB = |a|$, $BC = |b|$, $AC = |c|$?

Решение. Из векторов a , b и c можно составить треугольник, удовлетворяющий условиям задачи в том и только в том случае, если имеет место одно из следующих соотношений:

$$a + b + c = 0; a + b - c = 0; a - b + c = 0; a - b - c = 0.$$

Используя координаты векторов a , b , c , убеждаемся, что для них выполнено третье соотношение.

44. Даны векторы

$$a \{1, -2\}, b \{-1, 0\}, c \left\{ -\frac{3}{2}, 3 \right\}, d \left\{ -\frac{3}{2}, 1 \right\}.$$

Существует ли трапеция $ABCD$, стороны которой соответственно параллельны данным векторам и для которой

$$AB = |a|, BC = |b|, CD = |c| \text{ и } AD = |d|?$$

§ 5. Координаты точек; решение простейших задач в координатах

Литература: [1], часть 1, § 5—7, 18—20; [2], глава II, п. 25, 27, 28 и 31; [3], § 6, 7, 10—13.

45. Взяв прямоугольную декартову систему координат, построить следующие точки:

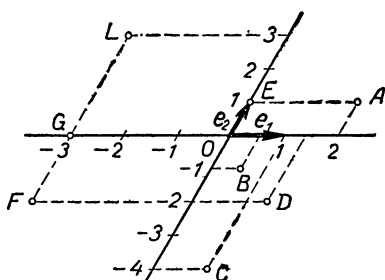
$$A(2, 1), B\left(\frac{1}{2}, -1\right), C(1, -4), D(\sqrt{2}, -2), E(0, 1),$$

$$F(-3, -2), G(-3, 0), L(-3, 3).$$

46. В прямоугольной декартовой системе координат построить точки, абсциссы которых равны соответственно $-3, -1, -2, -5$, а ординаты определяются из условия $y = 2x^2 - 10$.

47. Решить задачу 45, предполагая, что система координат аффинная.

Решение. Пусть Oe_1e_2 —данная система координат. Через точку O проведем оси



Черт. 13.

координат и построим на них «координатную шкалу». Для этой цели, принимая точку O за начало, построим систему векторов $e_1, 2e_1, 3e_1, \dots, -e_1, -2e_1, -3e_1, \dots$, концы которых лежат на оси Ox , и другую систему векторов $e_2, 2e_2, \dots, -e_2, -2e_2, \dots$, концы которых лежат на оси Oy .

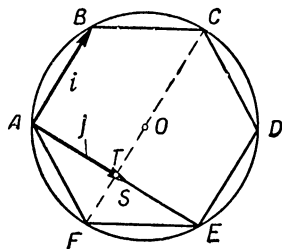
Таким образом, на осях координат получаем последовательность точек, отмеченных на чертеже 13 цифрами $1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots$. Пользуясь «координатной шкалой», легко построить все данные точки. Например, для построения точки A необходимо через точку 2 оси Ox провести прямую, параллельную оси Oy , а через точку 1 оси Oy —прямую, параллельную оси Ox . Точка пересечения этих прямых есть A . Точно так же строим все остальные точки (черт. 13).

Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно составить и решить ряд аналогичных примеров с тем, чтобы

приобрести твердые навыки в построении точек по координатам.

48. Начертить на плоскости две различные прямоугольные декартовы системы координат, в которых данная точка M имеет координаты $(2, 1)$.

49. Начертить на плоскости две различные аффинные системы координат, в которых точка M имеет координаты $(1, 1)$.



Черт. 14.

50. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин и центра O , принимая за начало координат точку A , а за координатные векторы \mathbf{i} и \mathbf{j} соответственно векторы \overline{AB} и \overline{AS} , где S такая точка отрезка AE , что $AS = AB$ (черт. 14).

Решение. Система координат прямоугольная декартова, так как $AB \perp AE$ и $AB = AS$. Примем $AB = AS$ за единицу измерения.

Пусть T — точка пересечения диагоналей FC и AE . Так как AE — сторона вписанного в окружность треугольника, то $AE = \sqrt{3}$. Точки A и E симметричны относительно диаметра FC и $AE \perp FC$, поэтому $AT = TE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника ATF получаем $TF = \frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}$, поэтому $CT = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Полученные соотношения позволяют определить координаты всех вершин шестиугольника.

1) $A(0, 0)$, так как A — начало координат.

2) $B(1, 0)$, так как B является концом первого координатного вектора.

3) $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в силу того, что координаты этой точки определяются отрезками $TC = \frac{3}{2}$ и $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $D(1, \sqrt{3})$ в силу того, что ее координаты определяются отрезками $DE = AB = 1$, $AE = \sqrt{3}$.

5) $E(0, \sqrt{3})$, так как E лежит на оси Oy и отстоит от начала координат на расстоянии $AE = \sqrt{3}$.

6) $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в силу того, что координаты этой точки определяются направленными отрезками $TF = -\frac{1}{2}$, $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7) $O\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в силу того, что ее координаты определяются отрезками $TO = \frac{1}{2}$ и $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично решите следующие две задачи.

51. В равнобокой трапеции $ABCD$ большее основание $AD=10$, высота равна 2, а угол при основании равен 30° . На плоскости взята прямоугольная система координат, начало которой O совпадает с серединой отрезка AD , а направление осей Ox и Oy — соответственно с направлением векторов \overrightarrow{OD} и \overrightarrow{OM} , где M — точка пересечения диагоналей трапеции.

Определить координаты всех вершин трапеции, точки M и точки N пересечения непараллельных сторон.

52. Решить предыдущую задачу в предположении, что начало координат находится в точке A , а координатными векторами e_1 и e_2 являются векторы \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{AB} .

53. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1, -3)$, $B(8, 0)$, $C(4, 8)$ и $D(-3, 5)$. Показать, что $ABCD$ есть параллелограмм. Система координат аффинная.

Решение. Предварительно напомним, что если началом вектора является точка $M_1(x_1, y_1)$, а его концом — точка $M_2(x_2, y_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$. Для решения задачи достаточно показать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Вычислив координаты \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} , убеждаемся в справедливости указанного равенства: $\overrightarrow{AB} \{7, 3\}$; $\overrightarrow{DC} \{7, 3\}$.

54. Вектор $a \{3, 4\}$ имеет начало в точке $M(-2, 3)$. Найти координаты его конца.

55. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(5, 0)$, $D(7, -5)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция. Система координат аффинная.

56. Дана точка $M(3, -2)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Найти координаты точки, симметричной точке M :

- а) относительно оси абсцисс;
- б) относительно оси ординат;
- в) относительно начала координат;
- г) относительно биссектрис всех координатных углов.

Решение. Если точка A имеет координаты (x, y) , то точка A' , симметричная ей относительно оси абсцисс, имеет координаты $(x, -y)$. В самом деле, середина M отрезка AA' лежит на оси Ox , так как ее координаты равны: $x_M = \frac{x+x}{2} = x$, $y_M = \frac{y-y}{2} = 0$. Кроме того, отрезок AA' перпендикулярен к оси Ox , так как вектор $\overrightarrow{AA'} \{0, -2y\}$ параллелен оси Oy .

Точно так же можно показать, что точка A'' , симметричная A относительно оси ординат, имеет координаты $(-x, y)$.

Определим координаты точки $A^*(x^*, y^*)$, симметричной A относительно начала координат. Для этой цели достаточно потребовать, чтобы середина отрезка AA^* совпала с началом координат, т. е. $\frac{x+x^*}{2} = 0$, $\frac{y+y^*}{2} = 0$.

Отсюда получаем: $x^* = -x$ и $y^* = -y$. Таким образом, точка A^* имеет координаты $(-x, -y)$.

Переходим к определению координат точек, симметричных A относительно биссектрис координатных углов. Пусть l_1 —биссектриса первого и третьего, а l_2 —второго и четвертого координатных углов. Пусть, далее, $A_1(x_1, y_1)$ симметрична с A относительно l_1 . Это означает, что отрезок AA_1 параллелен l_2 и, кроме того, середина этого отрезка лежит на l_1 . Так как l_2 имеет направление вектора $i - j$, то первое условие сводится к коллинеарности векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $i - j$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$y_1 - y = -x_1 + x. \quad (1)$$

Второе условие сводится к тому, что координаты середины отрезка AA_1 , т. е. $\frac{x+x_1}{2}$, $\frac{y+y_1}{2}$ равны друг другу:

$$x + x_1 = y + y_1. \quad (2)$$

Решив совместно два уравнения (1) и (2), получаем: $x_1 = y$, $y_1 = x$. Таким образом, A_1 имеет координаты (y, x) .

Точно так же определяем координаты точки A_2 , симметричной с A относительно l_2 : $A_2(-y, -x)$.

Для данного примера будем иметь:

$$M'(3, 2), M''(-3, -2), M^*(-3, 2), \\ M_1(-2, 3), M_2(+2, -3).$$

Предлагаем студенту-заочнику решить задачу 56 для точек:

$$N(-3, -1), P(\sqrt{2}, 5), Q(-3, -7), R(0, 3), S(-2, 0).$$

57. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2, 5)$, $B(0, 1)$, $C(3, -1)$. Определить координаты вершин треугольника $A'B'C'$, симметричного треугольнику ABC относительно оси Ox .

58. Определить координаты точек, делящих отрезок $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ в отношении:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = 3.$$

59. Две вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3, 6)$, $B(-3, 5)$. Определить координаты вершины C при условии, что середины сторон AC и BC лежат на осях координат. Система координат аффинная.

60. На прямой l взяты последовательно точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_2(2, 5)$ и $A_5(-1, 7)$ в аффинной системе координат, определить отношения, в которых точки A_1, A_3, A_4 и A_6 делят отрезок A_2A_5 , а также координаты этих точек.

61. Доказать, что точка пересечения M медиан треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ имеет координаты:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Пользуясь этой формулой, определить координаты точки пересечения медиан треугольника, если его вершины имеют координаты:

а) $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 1)$,

б) $A(-2, 3)$, $B(5, -2)$, $C(-3, -1)$.

62. В точке $A(2, 5)$ помещен груз в 60 г, а в точке $B(-3, 0)$ груз в 40 г. Определить координаты центра тяжести этой системы.

Решение. Центр тяжести двух материальных точек A и B находится в точке C , расположенной на отрезке AB и делящей этот отрезок в отношении, обратно пропорциональном массам, сосредоточенным в точках A и B . Таким образом, точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$. Зная λ , определим координаты точки C :

$$x_c = \frac{2 + \frac{2}{3}(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = 0; \quad y_c = \frac{5 + \frac{2}{3}(0)}{1 + \frac{2}{3}} = 3.$$

63. В точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ сосредоточены массы m_1 и m_2 . Доказать, что координаты центра тяжести системы двух материальных точек A и B определяются следующими соотношениями:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Пользуясь методом математической индукции, доказать, что координаты центра тяжести n материальных точек $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, \dots, m_n , определяются соотношениями:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}; \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

64. Даны координаты середины сторон AB, BC и CA треугольника ABC : $M\left(2, \frac{1}{2}\right), N(5, 1), P\left(4, -\frac{5}{2}\right)$. Определить координаты всех вершин треугольника.

65. В прямоугольной декартовой системе координат определить расстояние между точками $A_1(2, -1)$ и $A_2(1, 2)$; $B_1(1, 5)$ и $B_2(1, 1)$; $C_1(-3, 1)$ и $C_2(1, -2)$; $D_1(-1, 2)$ и $D_2(3, 0)$.

66. Определить радиус окружности, которая проходит через точку $(-2, 1)$ и имеет центр в точке $(2, -3)$.

67. Определить координаты точек, расположенных на окружности радиуса $r = 3$ с центром в начале координат и имеющих ординаты: $2, -1, 3, \sqrt{2}$.

68. В прямоугольной декартовой системе даны координаты вершин треугольника ABC : $A(4, 1), B(7, 5), C(-4, 7)$. Вычислить длину биссектрисы AD угла A .

Решение. Для определения длины биссектрисы AD достаточно знать координаты точки D . Так как AD биссектриса, то D делит отрезок BC на две части, пропорциональные прилежащим сторонам AB и AC . Отсюда легко определить отношение λ , в котором точка D делит отрезок BC , а зная λ —координаты точки D . Таким образом, намечается следующий план решения задачи:

1) Определяем длины сторон AB и AC , а затем $\lambda = \frac{BD}{DC}$.

2) Определяем координаты точки D .

3) Определяем длину биссектрисы AD .

Переходим к решению задачи.

$$1) AB = \sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$AC = \sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Таким образом, $\lambda = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$.

2) Если обозначить через (x, y) координаты точки D ,

$$\text{то } x = \frac{7 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}, \quad y = \frac{5 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{17}{3}.$$

$$3) AD = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{17}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{4+196}}{3} = \frac{10}{3} \sqrt{2}.$$

69. Определить длину медианы AM треугольника ABC , заданного в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин: $A(5, -4)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 1)$.

70. Пользуясь теоремой Пифагора, вычислением убедиться в том, что треугольник ABC , заданный в прямоугольной декартовой системе координатами своих вершин: $A(1, 1)$, $B(2, 5)$, $C(-6, 7)$ — прямоугольный.

71. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $B(-10, 4)$ и касающейся оси Ox в точке $A(-6, 0)$. Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Пусть r — радиус окружности, а x, y — координаты центра C . Так как окружность касается оси Ox в точке $A(-6, 0)$, то $x = -6$, $|y| = r$. Точки B и C

лежат по одну и ту же сторону от оси Ox , поэтому $y > 0$ и $y = r$. Для определения r воспользуемся условием: $BC = r$,

$$BC = \sqrt{(6-10)^2 + (4-r)^2} = \sqrt{r^2 - 8r + 32} = r.$$

Отсюда получаем: $r = 4$ и $C(-6, 4)$.

72. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-8, 4)$ и касающейся осей координат прямоугольной декартовой системы.

73. Вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев (система координат прямоугольная декартова).

а) $A(2, 1), \quad B(3, 4), \quad C(1, 6);$

б) $A(-2, 4), \quad B(0, -3), \quad C(1, 7);$

в) $A(5, 4), \quad B(11, 0), \quad C(0, 3).$

Решение. Если $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$ — вершины треугольника, то площадь треугольника $A_1A_2A_3$ в прямоугольной декартовой системе определяется формулой:

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right\|^1.$$

Подставив сюда значения координат данных точек, получаем: а) $S = 4$, б) $S = \frac{27}{2}$, в) $S = 13$.

74. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(-2, 1)$, $B(2, -2)$ и $C(8, 6)$. Вычислить периметр и площадь треугольника ABC .

§ 6. Полярные координаты

Литература: [1], часть I, § 8 — 10; [2], глава III, п. 43 — 46; [3], § 8 и 9.

75. В полярной системе координат построить точки:

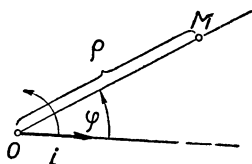
$$M_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right); \quad M_2\left(1, \frac{5\pi}{3}\right); \quad M_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2}\right);$$

$$M_4\left(3, \frac{\pi}{4}\right); \quad M_5\left(4, \frac{2\pi}{3}\right); \quad M_6\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{3}\right).$$

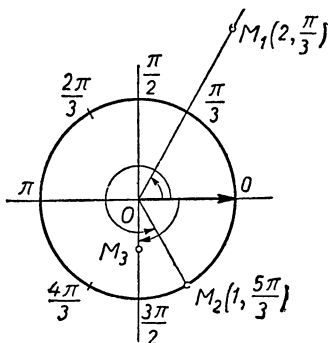
¹ Здесь записан модуль определителя второго порядка.

Решение. Для выбора полярной системы необходимо зафиксировать полюс O , полярную ось i и положительное направление отсчета углов¹ (черт. 15, а). Для построения точки $M(\rho, \varphi)$ необходимо сначала построить луч, исходящий из точки O и образующий с полярной осью i угол φ . При этом, если $\varphi > 0$, то его следует отложить в положительном направлении от оси i , в противном случае — в отрицательном направлении. Затем на построенном луче от точки O отложить отрезок OM , равный ρ .

Для построения точек по полярным координатам полезно иметь на чертеже вспомогательную окружность с центром в точке O



а)



б)

Черт. 15.

радиуса единицы. При этом предварительно окружность снабжают шкалой, т. е. на ней отмечают точки, имеющие определенные полярные углы: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ и т. д.

На чертеже 15, б) построены точки M_1, M_2, M_3 .

Предлагаем студенту-заочнику построить остальные точки. Кроме того, рекомендуем самостоятельно составить и решить ряд аналогичных примеров с тем, чтобы приобрести твердые навыки в построении точек по полярным координатам.

76. Дан квадрат, сторона которого равна 3. Приняв за полюс какую-нибудь вершину квадрата, а за полярную ось — одну из сторон, проходящую через нее, определить полярные координаты всех вершин и точки пересечения диагоналей.

¹ Положительным направлением отсчета углов будем считать направление, противоположное вращению часовой стрелки.

77. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a . Приняв за полюс какую-нибудь его вершину, а за полярную ось одну из сторон, через нее проходящую, определить полярные координаты всех вершин.

78. Найти полярные координаты точек, симметричных с точками $M_1(2, \frac{\pi}{4})$; $M_2(3, \frac{\pi}{3})$; $M_3(1, \frac{\pi}{4})$; $M_4(3, -\frac{\pi}{3})$

а) относительно полюса,

б) относительно полярной оси.

79. Пусть Oi — данная полярная система координат, Oij — прямоугольная декартова система, причем вектор j получен из вектора i поворотом на $+90^\circ$. Относительно полярной системы координат даны точки:

$$A(2, \frac{\pi}{3}); B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}); C(5, \frac{\pi}{2}); D(3, -\frac{\pi}{6}).$$

Определить их прямоугольные декартовы координаты.

Решение. Для определения прямоугольных декартовых координат точки $M(\rho, \varphi)$ воспользуемся следующими формулами: (см. [1], § 9)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Для точки A имеем: $x = 2 \cos \frac{\pi}{3}$, $y = 2 \sin \frac{\pi}{3}$. Таким образом, $A(1, \sqrt{3})$. Аналогично получаем прямоугольные декартовы координаты остальных точек: $B(-1, 1)$, $C(0, 5)$, $D(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$.

Пользуясь теми же формулами, можно решить следующий пример.

80. Пусть Oij — данная прямоугольная декартова система, а Oi — полярная система, причем положительное направление обхода выбрано так, что $\angle(i, j) = +90^\circ$.

Определить полярные координаты следующих точек:

$$M_1(0, 6); M_2(-2, 0); M_3(-1, 1);$$

$$M_4(\sqrt{3}, 1); M_5(0, -3); M_6(1, -\sqrt{3}).$$

81. Вывести формулу для вычисления площади треугольника, одна из вершин которого совпадает с полюсом, а две другие даны своими полярными координатами: $A(\rho_1, \varphi_1)$, $B(\rho_2, \varphi_2)$.

Пользуясь этой формулой, вычислить площадь треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$ и $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$.

82. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими полярными координатами.

Решение. Пусть Oi — полярная система координат, а $M(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ — точки, расстояние между которыми необходимо вычислить. Построим вспомогательную прямоугольную декартову систему координат Oij так, чтобы вектор j был получен из вектора i поворотом последнего на угол $+90^\circ$. В построенной системе взятые точки будут иметь координаты: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1$, $y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$, $x_2 = \rho_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = \rho_2 \sin \varphi_2$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} M_1 M_2 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \\ &= \sqrt{(\rho_1 \cos \varphi_1 - \rho_2 \cos \varphi_2)^2 + (\rho_1 \sin \varphi_1 - \rho_2 \sin \varphi_2)^2}. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем:

$$M_1 M_2 = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Пользуясь этой формулой, решите следующую задачу.

83. Треугольник ABC задан полярными координатами вершин: $A\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$; $B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right)$; $C\left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

84. Как расположены точки на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют одному из следующих условий:

а) $\rho = 3$; б) $\rho = 5$; в) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

д) $\rho \cos \varphi = 5$; е) $\rho \sin \varphi = 3$?

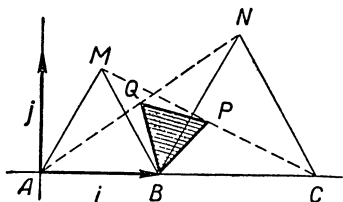
§ 7. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии

Литература: [2], глава III, п. 30, 31.

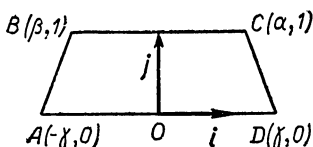
85. На прямой l даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между A и C . По одну сторону от прямой

l построены равносторонние треугольники AMB и BNC . Доказать, что середина отрезка MC , середина отрезка NA и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Пусть P — середина отрезка MC , а Q — середина отрезка AN (черт. 16). Требуется доказать, что $\triangle PQB$ — равносторонний. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, определим коор-



Черт. 16.



Черт. 17.

динаты вершин $\triangle PQB$, найдем длины его сторон и убедимся в том, что $PQ = QB = BP$.

Систему координат выберем следующим образом: начало O совместим с точкой A , за вектор i примем вектор \overline{AB} , а вектор j направим так, чтобы его конец и точки M и N лежали по одну сторону от прямой l . Если $BC = a$, то легко убедиться в том, что вершины данных треугольников в системе Oij имеют координаты:

$$A(0, 0), B(1, 0); C(1 + a, 0), \\ M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), N\left(1 + \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

Определим координаты точек $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + 1 + a}{2} = \frac{3 + 2a}{4}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}; \\ x_2 = \frac{2 + a}{4}, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Пользуясь формулой для вычисления длины отрезка по координатам концов, получаем:

$$BQ = PQ = PB = \frac{\sqrt{a^2 - a + 1}}{2}.$$

86. Доказать, что если у трапеции диагонали равны, то трапеция равнобокая.

Указание. Если систему координат выбрать так, как указано на чертеже 17, то из условия $AC = BD$ получаем:

$$\alpha + \beta = 0.$$

87. Дан треугольник и в его плоскости произвольная точка M , которая дважды последовательно отражается относительно всех вершин треугольника. Доказать, что после последнего отражения отраженная точка совпадает с точкой M .

88. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и B_1 , которые делят эти стороны в данных отношениях $\frac{AC_1}{C_1B} =$

$= \lambda$, $\frac{AB_1}{B_1C} = \mu$. В каком отношении делят друг друга отрезки BB_1 и CC_1 ?

Решение. Обозначим через P точку пересечения отрезков BB_1 и CC_1 , а через ν_1 и ν_2 отношения

$$\frac{BP}{PB_1} = \nu_1, \quad \frac{CP}{PC_1} = \nu_2.$$

Выберем точку A за начало координат, а векторы \overline{AB} и \overline{AC} за координатные векторы e_1 и e_2 (черт. 18). В этой системе координат вершины треугольника, очевидно, будут иметь следующие координаты:

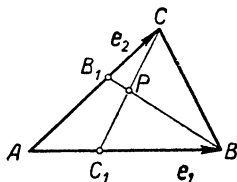
$$A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1).$$

Далее, пользуясь соотношениями $\lambda = \frac{AC_1}{C_1B}$ и $\mu = \frac{AB_1}{B_1C}$, определяем координаты точек B_1 и C_1 :

$$B_1\left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right), C_1\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, 0\right).$$

Определим координаты точки $P(x, y)$, учитывая, что $\frac{BP}{PB_1} = \nu_1$:

$$P\left(\frac{1}{1+\nu_1}, \frac{\nu_1\mu}{(1+\mu)(1+\nu_1)}\right).$$



Черт. 18.

Определим координаты той же точки, учитывая, что $\frac{CP}{PC_1} = v_2$:

$$P \left(\frac{v_2 \lambda}{(1 + \lambda)(1 + v_2)}, \frac{1}{1 + v_2} \right).$$

Таким образом, для определения искоемых величин v_1 и v_2 получаем соотношения:

$$\frac{1}{1 + v_1} = \frac{v_2 \lambda}{(1 + \lambda)(1 + v_2)}, \quad \frac{v_1 \mu}{(1 + \mu)(1 + v_1)} = \frac{1}{1 + v_2}.$$

Из этих соотношений после элементарных преобразований получаем:

$$v_1 = \frac{1 + \mu}{\lambda}, \quad v_2 = \frac{1 + \lambda}{\mu}.$$

Если $\lambda = \mu = 1$, т. е. если BB_1 и CC_1 являются медианами треугольника, то $v_1 = v_2 = 2$. Таким образом, мы доказали, что если P — точка пересечения любых двух медиан треугольника ABC , то этой точкой каждая медиана делится в отношении 2:1. Отсюда непосредственно следует известная теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1.

89. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершины последнего делят стороны треугольника ABC в одном и том же отношении: $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \lambda$.

Показать, что точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают.

Указание. Принять две стороны треугольника за векторы аффинной системы координат и учесть, что если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$, то точка пересечения медиан треугольника ABC имеет координаты:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

90. Доказать, что в трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям и равен их полуразности.

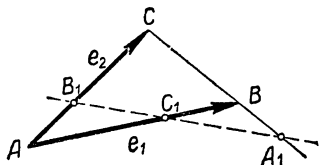
91. Доказать теорему Менелая: для того чтобы три точки A_1, B_1, C_1 , лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (или на их продолжениях),

принадлежали одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$

Решение. Возьмем точку A за начало координат, а векторы \overline{AB} и \overline{AC} — за координатные векторы аффинной системы координат (черт. 19). Введем обозначения:

$$\lambda_3 = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}, \quad \lambda_1 = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}$$



Черт. 19

и определим координаты точек A_1 , B_1 и C_1 . В выбранной системе координат вершины треугольника ABC , очевидно, будут иметь координаты $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Если $A_1(x_1, y_1)$, $B_1(x_2, y_2)$ и $C_1(x_3, y_3)$, то

$$x_1 = \frac{1 + \lambda_1 \cdot 0}{1 + \lambda_1} = \frac{1}{1 + \lambda_1}; \quad y_1 = \frac{0 + \lambda_1 \cdot 1}{1 + \lambda_1} = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1};$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{1 + \lambda_2}; \quad x_3 = \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3}, \quad y_3 = 0.$$

Для того чтобы точки A_1 , B_1 и C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{1 + \lambda_1} & \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1 + \lambda_2} & 1 \\ \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{1}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)} + \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} \left(\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} - \frac{1}{1 + \lambda_2} \right) = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:
 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 1 = 0.$

Таким образом,

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$

92. Показать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

93. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, будучи продолженными, пересекаются в точке O . Обозначая через S и P соответственно середины диагоналей BD и AC , показать, что площадь треугольника OSP равна четвертой части площади четырехугольника $ABCD$.

Указание. Пусть A лежит между O и B . Примем точку O за начало прямоугольной декартовой системы координат, а вектор \overrightarrow{OA} — за единичный вектор i . В этой системе координаты вершин четырехугольника могут быть записаны так: $A(1, 0)$, $B(\lambda, 0)$, $D(\alpha, \beta)$, $C(\mu\alpha, \mu\beta)$, причем $\lambda > 1$, $\mu > 1$. Вычислить площади треугольников OAD , OBC , OSP и показать, что $S_{OBC} - S_{OAD} = 4 S_{OSP}$.

94. Внутри треугольника ABC взята точка O . Доказать, что треугольники OAB , OBC и OCA равновелики тогда и только тогда, когда O является точкой пересечения медиан.

Указание. Взять точку O за начало координат и учесть указание к задаче 89.

Глава III

УРАВНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [1], часть 1, § 12, 13, 37, 38; [2], глава IV; [3], § 32—35.

§ 8. Составление уравнения геометрического места точек; исследование геометрического места по уравнению

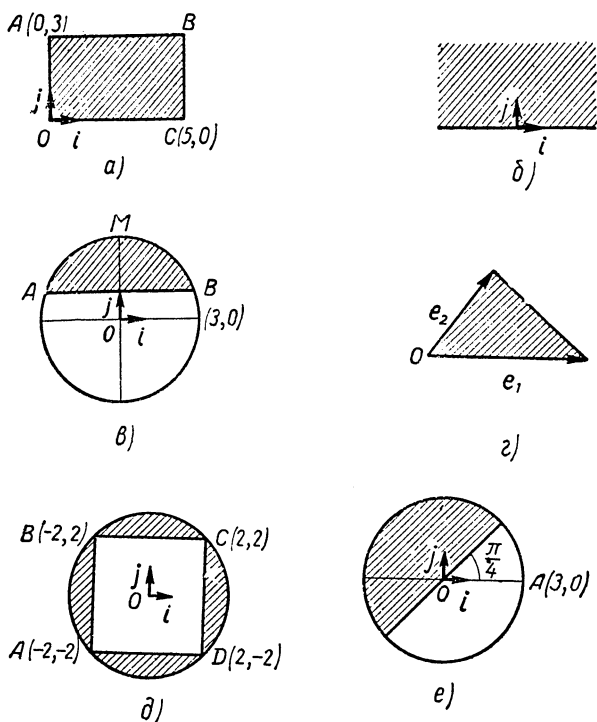
95. Написать необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют координаты точек каждой из заштрихованных фигур, изображенных на чертеже 20. При этом предполагается, что точки, принадлежащие контурам фигур, относятся к самим фигурам (система координат для каждой фигуры указана на чертеже).

Решение. На чертеже 20, а) изображен прямоугольник $OABC$, измерения которого соответственно равны 5 и 3. Очевидно, первые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OA и CB , вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам: $0 \leq x \leq 5$, вторые же координаты этих точек произвольны. Аналогично, вторые координаты всех точек, лежащих в полосе между параллельными прямыми OC и AB , вместе с точками этих прямых, удовлетворяют неравенствам: $0 \leq y \leq 3$, а первые координаты этих точек произвольны. Данный четырехугольник есть пересечение рассматриваемых двух полос, поэтому координаты точек четырехугольника удовлетворяют соотношениям: $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 3$. Эти соотношения могут быть названы «уравнениями» данной фигуры.

На чертеже 20, б) изображена полуплоскость. Первые координаты всех точек этой полуплоскости произвольны,

а вторые координаты не отрицательны. Таким образом, «уравнения» этой фигуры запишутся так: $y \geq 0$.

На чертеже 20, в) изображен сегмент, который может быть рассмотрен как пересечение двух областей: круга с центром в точке O и радиуса OB и полуплоскости λ ,



Черт. 20.

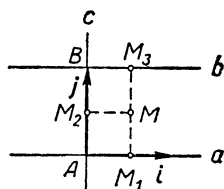
определяемой прямой AB и точкой M . Так как $OB = 3$, то координаты точек рассматриваемого круга удовлетворяют условию: $x^2 + y^2 \leq 9$. С другой стороны, координаты точек полуплоскости λ удовлетворяют условию: $y \geq 1$ (координаты x произвольны!). Отсюда следует, что «уравнения» рассматриваемой фигуры могут быть записаны так:

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq 1.$$

«Уравнения» фигур, изображенных на чертежах 20, в), д) и е), предлагаем записать самостоятельно.

96. Даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c . Определить геометрическое место точек, равноудаленных от данных трех прямых.

Решение. Пусть A и B — точки пересечения прямой c соответственно с прямыми a и b . Примем точку A за начало координат, вектор i направим вдоль прямой a , а в качестве j возьмем вектор \overrightarrow{AB} (черт. 21). Для того чтобы точка M принадлежала геометрическому месту точек, необходимо и достаточно, чтобы $M_1M = M_2M$ и $M_1M = M_3M$. Так как $M_1M = |y|$, $M_2M = |x|$, $M_3M =$



Черт. 21.

$= |1 - y|$, то предыдущие соотношения запишутся так:

$$|y| = |x| \text{ и } |y| = |1 - y|.$$

Эти соотношения являются уравнениями искомого геометрического места точек.

Выясним, что представляет собой искомое геометрическое место точек. Отметим, что $|y| \neq 0$, так как в противном случае из второго соотношения следует, что $|y - 1| = 0$. Соотношения: $|y| = 0$ и $|y - 1| = 0$, очевидно, противоречивы.

Легко видеть также, что $y > 0$. В самом деле, если $y < 0$, то $|1 - y| = 1 - y$, $|y| = -y$ и, следовательно, $|1 - y| \neq |y|$.

Таким образом, $y > 0$ и $|y| = y$. Возможны два случая. а) $1 - y > 0$, б) $1 - y < 0$. В первом случае $y = 1 - y$, поэтому $y = \frac{1}{2}$. Во втором случае $y = -(1 - y)$, что противоречиво. Итак, соотношение $|y| = |1 - y|$ эквивалентно соотношению $y = \frac{1}{2}$.

Подставив это значение y в соотношение $|x| = |y|$, получаем: $x = \pm \frac{1}{2}$.

Следовательно, искомое геометрическое место точек состоит из двух точек: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

97. Определить геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному положительному числу.

98. Дан прямоугольник $ABCD$. Определить геометрическое место всех точек X , для которых $AX + CX = BX + DX$.

Указание. За оси координат принять прямые, соединяющие середины противоположных сторон.

99. Исследовать геометрические места точек, заданные уравнениями в прямоугольной декартовой системе:

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| а) $x - y = 0$; | г) $xy + y^2 = 0$; |
| б) $x^2 + 2x - 15 = 0$; | д) $x^2 - y^2 = 0$; |
| в) $y + 3 = 0$; | е) $x - 5 = 0$; |
| | ж) $y^2 - 2yx = 0$. |

100. Исследовать геометрические места точек, заданные уравнениями:

- а) $|x| = 1$, б) $|x| = |y|$, в) $x = |x - y|$.

Решение. а) Для каждой точки геометрического места $x = \pm 1$. Обратно, всякая точка плоскости, первая координата которой удовлетворяет одному из этих условий, принадлежит геометрическому месту точек.

Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой пару прямых, параллельных оси Oy и проходящих через точки $(1, 0)$, $(-1, 0)$.

б) Для каждой точки геометрического места $x = \pm y$. Обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют условиям $x = y$ или $x = -y$, принадлежит геометрическому месту точек. Очевидно, рассматриваемое геометрическое место точек представляет собой пару прямых, одна из которых проходит через точки $(0, 0)$, $(1, 1)$, а другая через точки $(0, 0)$, $(-1, 1)$. Если система прямоугольная декартова, то эти прямые представляют собой биссектрисы координатных углов.

в) Так как $|x - y| \geq 0$, то $x \geq 0$. Отсюда следует, что все точки геометрического места расположены по ту же сторону от оси Oy , что и вектор e_1 . Возводя данное соотношение в квадрат, получаем: $x^2 = x^2 - 2xy + y^2$ или $y(y - 2x) = 0$. Очевидно, если координаты точки удовлетворяют исходному уравнению, то они удовлетворяют также полученному уравнению. Заметим, что обратное утверждение не всегда справедливо: например, координаты точки $M(-1, -2)$ удовлетворяют второму уравнению, но не удовлетворяют исходному. Уравнением $y(y - 2x) = 0$ за-

дается пара прямых (см. задачу 99, ж). Для определения искомого геометрического места точек следует отбросить те точки, для которых $x < 0$.

Таким образом, мы получаем пару лучей, исходящих из начала координат и содержащих точки $(1, 0)$ и $(1, 2)$.

101. Выяснить, какие из геометрических мест точек, заданных следующими парами уравнений,

а) $x = |x - 2y|$ и $xy - y^2 = 0$;

б) $x = y$ и $x^2 = y^2$;

в) $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 3$ и $(x-a)^2 + y^2 = 9$

совпадают.

102. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B , представляет собой прямую, проходящую через середину отрезка AB и перпендикулярную к нему.

103. Определить геометрические места точек, заданных следующими уравнениями в полярной системе координат:

а) $\rho = 4$; д) $\rho \sin \varphi = 1$;

б) $\rho \cos \varphi = 2$; е) $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\rho = 10 \sin \varphi$; ж) $\sin \varphi = \cos \varphi$.

г) $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

Указание. В примерах б), в), д) и ж) целесообразно перейти к прямоугольной декартовой системе.

§ 9. Задачи на геометрические места точек, приводящие к окружности

104. Исследовать геометрическое место точек, координаты которых в прямоугольной декартовой системе удовлетворяют уравнению:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Решение. Данное уравнение можно преобразовать так:

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} + C - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} = 0,$$

или

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}. \quad (2)$$

Возможны следующие случаи:

а) $A^2 + B^2 - 4C > 0$. В этом случае соотношение (2), которое эквивалентно соотношению (1), может быть записано так:

$$\left[x - \left(-\frac{A}{2}\right)\right]^2 + \left[y - \left(-\frac{B}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}\right]^2.$$

Очевидно, этим уравнением определяется окружность с центром в точке $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ и радиусом $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$.

б) $A^2 + B^2 - 4C = 0$. Соотношение (2) принимает вид:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = 0.$$

Этому соотношению удовлетворяют, очевидно, координаты единственной точки $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$. Таким образом, геометрическое место точек состоит из одной точки, т. е. представляет собой «окружность» нулевого радиуса.

в) $A^2 + B^2 - 4C < 0$. В этом случае не существует на плоскости ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (2) или (1). Искомое геометрическое место не имеет ни одной точки¹.

Резюмируя все сказанное, мы приходим к выводу, что характер геометрического места точек, заданного уравнением (1), определяется знаком числа $\alpha = A^2 + B^2 - 4C$. Если $\alpha > 0$, то искомое геометрическое место есть окружность, если $\alpha = 0$ — одна точка, если $\alpha < 0$ — геометрическое место пустое.

105. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения геометрических мест точек:

$$а) \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0,$$

¹ В этом случае существуют комплексные числа, удовлетворяющие уравнению (2) или (1), поэтому говорят, что геометрическое место состоит из комплексных точек (см. [1], § 11) и является «мнимой окружностью».

$$\text{б) } x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0,$$

$$\text{в) } x^2 + xy - 2x = 0,$$

$$\text{г) } x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0,$$

$$\text{д) } x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

$$\text{е) } x^2 + y^2 + 2y + 8 = 0,$$

$$\text{ж) } x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Выяснить, какие из приведенных уравнений определяют окружность, и определить координаты центра и радиус окружности.

106. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно.

Решение. Пусть A и B данные точки. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало координат было в точке B , а положительное направление оси абсцисс совпало с направлением вектора \overrightarrow{BA} . Если $AB = a$, то точка A будет иметь координаты $(a, 0)$, а точка B координаты $(0, 0)$. Если $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места, то $\frac{AM}{BM} = \lambda$, где AM и BM расстояние от точки M до данных точек A и B , а λ — данное постоянное число, причем $\lambda > 0$.

$$\text{Так как } AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{то}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Это соотношение является уравнением искомого геометрического места точек. Возведем обе части соотношения (1) в квадрат:

$$(x-a)^2 + y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2). \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) эквивалентны (см. задачу 101, в) поэтому (2) есть также уравнение искомого геометрического места точек. Преобразуя это уравнение, получаем:

$$x^2(1 - \lambda^2) + y^2(1 - \lambda^2) - 2ax + a^2 = 0. \quad (3)$$

Возможны два случая:

а) $\lambda = 1$. Уравнение (3) принимает вид: $-2ax + a^2 = 0$,
или $x = \frac{a}{2}$.

В этом случае искомое геометрическое место точек представляет собой прямую, перпендикулярную к AB и проходящую через ее середину.

б) $\lambda \neq 1$. Разделив соотношение (3) на $1 - \lambda^2$, получаем:

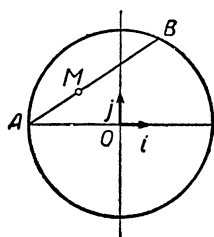
$$x^2 + y^2 - \frac{2a}{1 - \lambda^2} x + \frac{a^2}{1 - \lambda^2} = 0.$$

Так как

$$\alpha = \frac{4a^2}{(1 - \lambda^2)^2} + 0^2 - \frac{4a^2}{1 - \lambda^2} = \frac{4a^2 \lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} > 0,$$

то искомое геометрическое место точек представляет собой окружность с центром на прямой AB (см. задачу 104).

Для построения этой окружности достаточно построить две точки ее пересечения с прямой AB .



Черт. 22.

107. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

108. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых от трех данных точек A , B и C есть величина постоянная.

109. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к данной окружности, имеют постоянную длину.

110. Определить геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

Указание. Начало координат взять в середине отрезка AB и воспользоваться теоремой Пифагора.

111. Дана окружность радиуса r и на ней точка A . Найти геометрическое место точек, делящих всевозможные хорды, проведенные через A , в одном и том же отношении λ .

Решение. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы центр данной окружности совпал с началом координат, а точка A имела координаты $A(-r, 0)$ (черт. 22). Пусть AB — произвольная хорда, проходящая через точку A , а M — точка геометрического места, т. е. $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Обозначая координаты точек B и M

соответственно через (x_1, y_1) и (x, y) , будем иметь:

$$x = \frac{-r + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1 + \lambda}.$$

Отсюда, учитывая что $\lambda \neq 0$, получаем:

$$x_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right), \quad y_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} y. \quad (1)$$

Так как точка $B(x_1, y_1)$ лежит на данной окружности, то $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, поэтому

$$\left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 \left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 y^2 = r^2$$

или

$$\left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right)^2 + y^2 = \frac{r^2 \lambda^2}{(1 + \lambda)^2}. \quad (2)$$

Мы доказали, что если $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2).

Теперь возьмем произвольную точку $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), и покажем, что она принадлежит геометрическому месту. Уравнение (2) может быть записано в виде:

$$\left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 \left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right)^2 + \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda} \right)^2 y^2 = r^2. \quad (3)$$

Рассмотрим на плоскости точку B с координатами:

$$x_1 = \frac{1 + \lambda}{\lambda} \left(x + \frac{r}{1 + \lambda} \right) = \frac{(1 + \lambda)x + r}{\lambda}; \quad y_1 = \frac{(1 + \lambda)y}{\lambda}. \quad (4)$$

Из (3) следует, что точка B лежит на данной окружности. С другой стороны, из соотношений (4) получаем:

$$x = \frac{-r + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda y_1}{1 + \lambda},$$

откуда следует, что M делит отрезок AB в отношении λ и, следовательно, M принадлежит геометрическому месту точек.

Таким образом, соотношение (2) является уравнением искомого геометрического места точек. Этим уравнением

определяется окружность радиуса $\rho = \frac{r\lambda}{1+\lambda}$ с центром в точке $\left(-\frac{r}{1+\lambda}, 0\right)$. Легко видеть, что эта окружность при любом λ проходит через точку A . Если $\lambda = 1$, то она проходит также через начало координат.

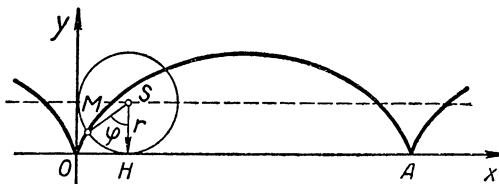
112. На окружности радиуса r взята точка O , вокруг которой вращается прямая, пересекающая окружность в переменной точке B . На этой прямой, по обе стороны от точки B , откладываются отрезки $BM_1 = BM_2 = AB$, где A другой конец диаметра, проходящего через точку O . Определить линии, описываемые точками M_1 и M_2 при вращении прямой OB .

У к а з а н и е. Написать уравнение искомого геометрического места точек в полярной системе координат, приняв точку O за полюс, а диаметр, проходящий через нее, — за полярную ось; затем перейти к прямоугольной декартовой системе координат.

113. Найти геометрическое место середин всех хорд окружности, имеющих данную длину.

§ 10. Некоторые замечательные кривые¹

114. *Циклоидой* называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r , катящейся без скольжения по данной прямой l .



Черт. 23.

Приняв прямую l за ось абсцисс, а начальное положение точки M за начало координат, написать уравнение циклоиды и построить ее по точкам.

¹ Решение всех задач § 10 для студента-заочника не считается обязательным.

Подробнее о свойствах некоторых замечательных кривых студент может прочитать в книге: М. Я. Выгодский, Справочник по высшей математике, изд. 6, Физматгиз, 1962.

Решение. Сначала напомним параметрическое задание циклоиды. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка циклоиды, S — центр катящейся окружности, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на ось абсцисс (черт. 23). Примем в качестве параметра угол, который образует луч SM с лучом SH , т. е. $\varphi = \angle MSH$.

Если M_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс, а M_2 — основание перпендикуляра, опущенного из той же точки на ось ординат (точки M_1 и M_2 на черт. 23 не изображены), то, очевидно,

$$x = OM_1 = OH - M_1H = r\varphi - r \sin \varphi = r(\varphi - \sin \varphi);$$

$$y = OM_2 = r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi).$$

Таким образом, циклоида имеет следующее параметрическое задание:

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\varphi - \sin \varphi), \\ y &= r(1 - \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Получим, далее, уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе. Для этой цели исключим из соотношений (1) параметр φ . Из второго уравнения (1) получим:

$$\cos \varphi = \frac{r - y}{r}; \quad \varphi = \arccos \frac{r - y}{r}.$$

Подставив это значение φ в первое уравнение (1) и учитывая, что

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r - y}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{y(2r - y)}}{r},$$

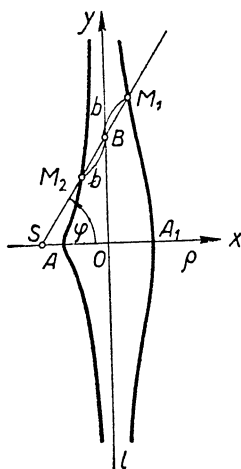
получаем:

$$x + \sqrt{y(2r - y)} = r \arccos \frac{r - y}{r}.$$

Для построения циклоиды по точкам заметим, что она периодическая; период (базис циклоиды) $OA = 2\pi r$. Поэтому при построении кривой достаточно рассмотреть только те точки, для которых $x \leq 2\pi r$. Кривая изображена на чертеже 23.

115. *Эпициклоидой* называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r , катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности радиуса R .

Написать параметрическое задание эпициклоиды, приняв центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр — угол $\varphi = \angle COA$, где C — центр катящейся окружности, а A — точка на положительной полуоси Ox .



Черт. 24.

В частности, рассмотреть случай, когда $r = R$. В этом случае кривая называется *кардиоидой*. Построить кардиоиду по точкам.

116. *Гипоциклоидой* называется траектория, описываемая точкой M окружности радиуса r , катящейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R .

Приняв центр O неподвижной окружности за начало прямоугольной декартовой системы координат, а за параметр — угол $\varphi = \angle COP$, где C — центр катящейся окружности, а P — точка положительной полуоси Ox , написать параметрическое уравнение гипоциклоиды.

В частности, рассмотреть случай, когда $r = \frac{1}{4} R$. В этом слу-

чае кривая называется *астроидой*. Построить астроиду по точкам.

117. Дана прямая l и точка S , отстоящая от нее на расстоянии $a \neq 0$. Через точку S проводятся всевозможные прямые, на каждой из которых от точки B пересечения с прямой l откладывается в обе стороны отрезок, равный b . Геометрическое место концов этих отрезков называется *конхоидой Никомеда*. Приняв точку S за полюс полярной системы и направив полярную ось перпендикулярно к прямой l , написать уравнение конхоиды Никомеда и построить ее по точкам.

Решение. Пусть SB произвольная прямая, проходящая через S и пересекающая прямую l в точке B (черт. 24). Тогда точки M_1 и M_2 , лежащие на этой прямой и отстоящие от точки B на расстоянии b , принадлежат искомому геометрическому месту точек. Если (ρ_1, φ) и (ρ_2, φ) обобщенные полярные координаты точек M_1 и M_2 (см. [1], часть 1, § 10), то, очевидно,

$$\rho_1 = SM_1 = SB + BM_1 = \frac{a}{\cos \varphi} + b;$$

$$\rho_2 = SM_2 = SB - BM_2 = \frac{a}{\cos \varphi} - b.$$

Таким образом, в обобщенной полярной системе кривая задается следующим уравнением:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm b. \quad (1)$$

Отметим, что это уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(\rho - \frac{a}{\cos \varphi} \right)^2 = b^2, \quad (2)$$

поэтому уравнение (2) также является уравнением конхоиды Никомеда.

Для перехода к уравнению кривой в прямоугольной декартовой системе координат воспользуемся соотношениями $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, откуда $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$. Подставив полученное значение для $\cos \varphi$ в отношение (2), получаем:

$$\rho^2 \left(\frac{x - a}{x} \right)^2 = b^2,$$

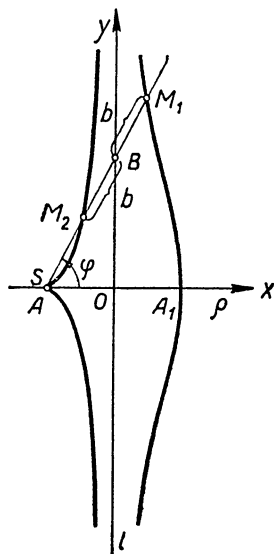
или

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2 x^2.$$

Кривая для случая $a > b$ изображена на чертеже 24, а для случая $a = b$ — на чертеже 25.

Для случая $b > a$ построить изображение кривой самостоятельно.

Отметим, что конхоидой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении полярного радиуса каждой точки данной кривой на постоянный отрезок b . Если $\rho = f(\varphi)$ есть уравнение данной кривой в полярных координатах, то $\rho = f(\varphi) \pm b$ — уравнение



Черт. 25.

конхоиды. Таким образом, конхоида Никомеда есть конхоида прямой линии.

118. Улиткой Паскаля называется конхоида окружности, если за полюс O выбрана точка на окружности (см. предыдущую задачу). Написать уравнение улитки Паскаля, приняв диаметр, проходящий через точку O , за полярную ось.

Если r — радиус данной окружности, а b — постоянный отрезок, который откладывается на полярном радиусе, и если $2r = b$, то улитка Паскаля является кардиоидой (см. задачу 115). Доказать это предложение.

119. Пусть F_1 и F_2 — две фиксированные точки, b — постоянное число и $F_1 F_2 = 2c$. Овалом Кассини называется геометрическое место точек M , для которых

$$F_1 M \cdot F_2 M = b^2.$$

Приняв прямую $F_1 F_2$ за ось абсцисс, а середину отрезка $F_1 F_2$ — за начало координат, написать уравнение кривой. При $b = c$ овал Кассини называется лемнискатой Бернулли. По уравнению построить лемнискату Бернулли.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка геометрического места. Если $F_1 F_2 = 2c$, то точки F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, поэтому соотношение $F_1 M \cdot F_2 M = b^2$ в координатах запишется так: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = b^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению: $[(x+c)^2 + y^2][(x-c)^2 + y^2] = b^4$.

После элементарных преобразований получаем:

$$[(x^2 + y^2 + c^2) + 2xc][(x^2 + y^2 + c^2) - 2xc] = b^4.$$

Отсюда имеем: $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4x^2 c^2 = b^4$ или

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)c^2 + c^4 - 4x^2 c^2 = b^4.$$

Окончательно получаем следующее уравнение овала Кассини:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4.$$

При $b = c$ получаем уравнение лемнискаты Бернулли:

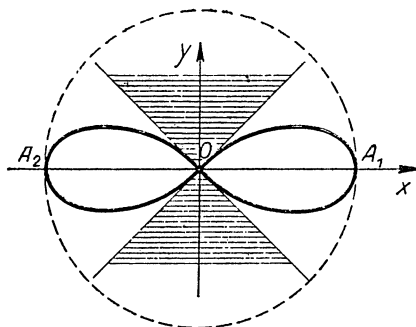
$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0. \quad (1)$$

Для построения этой кривой по уравнению перейдем к полярной системе координат, положив $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi. \quad (2)$$

Исследуем свойства кривой по уравнениям (1) и (2).

а) Кривая симметрична как относительно начала координат, так и относительно координатных осей Ox и Oy , так как в уравнении (1) переменные x и y входят в четных степенях. Отсюда следует, что можно ограничиться рассмотрением формы кривой только в первой четверти.



Черт. 26.

б) Определим точки пересечения кривой с осями координат. Положив $x = 0$, из соотношения (1) получаем: $y^4 + 2c^2 y^2 = 0$, отсюда $y = 0$. Таким образом, кривая проходит через начало координат и других точек пересечения с осью Oy не имеет. Положив в (1) $y = 0$, будем иметь: $x^4 - 2c^2 x^2 = 0$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}c$, $x_4 = -\sqrt{2}c$. Кривая пересекает ось абсцисс в точках $O(0, 0)$, $A_1(\sqrt{2}c, 0)$, $A_2(-\sqrt{2}c, 0)$.

в) Из отношения (2) следует, что $\frac{\rho^2}{2c^2} \leq 1$, поэтому $\rho \leq \sqrt{2}c$. Таким образом, все точки кривой принадлежат кругу с центром в начале координат, радиуса $r = \sqrt{2}c$ (черт. 26).

г) Исследуем значение ρ при изменении полярного угла φ в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Если $\varphi = 0$, то из соотношений (2) имеем: $\rho = \sqrt{2}c$; при увеличении φ полярный радиус монотонно убывает и при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ получаем: $\rho = 0$. При дальнейшем увеличении угла φ будем иметь: $\rho^2 < 0$, по-

этому ρ не существует. Таким образом, все точки кривой расположены между двумя биссектрисами координатных углов. На чертеже 26 заштрихована та область, в которой нет ни одной точки кривой.

Эти выводы позволяют построить кривую по уравнению. Для более точного изображения кривой необходимо взять несколько точек кривой в первой четверти и по координатам построить их.

На чертеже 26 изображена лемниската Бернулли.

120. Луч l , исходящий из неподвижной точки O , вращается с постоянной угловой скоростью ω . Точка M , имея начальное положение в точке O , движется по лучу l равномерно со скоростью v . Траектория точки M называется *спиралью Архимеда*. Приняв точку O за полюс, написать уравнение спирали Архимеда в полярной системе координат. Построить кривую по точкам.

Глава IV

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 11. Составление уравнения прямой по различным заданиям; построение прямой по уравнению

Литература: [1], часть 1, § 21, 22, 25, 28—32; [2], глава IV, п. 58—63; глава V, п. 92 и 94; [3], § 36—40.

121. Дана прямая $2x - y + 5 = 0$. Выяснить, какие из следующих точек принадлежат данной прямой:

$$(5, 15); (1, 1); (-2, 1); (3, 0); \\ (7, -5); (1, 7); \left(\frac{1}{2}, 6\right); (0, 3).$$

122. Определить точки, которые принадлежат прямой $3x - 2y + 1 = 0$ и имеют ординаты: $1, \frac{1}{2}, 2, -1, 3, 5, -4$.

123. Определить точки, которые принадлежат прямой $7x + 2y - 8 = 0$ и имеют абсциссы: $2, -4, 3, -1, 1, 0, 5$.

124. Дана аффинная система координат. Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точки $A(2, -1), B(3, 0)$,

б) проходящей через точку $A(3, 5)$ и параллельной вектору $\mathbf{p} \{3, -2\}$,

в) проходящей через точку $A(2, 5)$ и параллельной прямой $x - 2y + 1 = 0$.

Решение. а) Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставляя сюда координаты данных точек, получим:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{1} \text{ или } x - y - 3 = 0.$$

б) Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ параллельно вектору $p\{\alpha, \beta\}$, имеет вид:

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{array} \right| = 0 \text{ или } \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

Для нашего случая получим:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-2} \text{ или } 2x + 3y - 21 = 0.$$

в) Известно, что прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна вектору $p\{-B, A\}$. Из условий задачи определяем координаты вектора, параллельного данной прямой: $p\{2, 1\}$. Этот же вектор параллелен искомой прямой, поэтому уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{1} \text{ или } x - 2y + 8 = 0.$$

125. Дана аффинная система координат. Написать уравнение прямой:

- а) проходящей через точки $A(-1, 1)$ и $B(2, 5)$;
- б) проходящей через начало координат и точку $A(2, 5)$;
- в) проходящей через точку $A(2, -6)$ и параллельной вектору $p\{1, -1\}$;
- г) отсекающей на осях координат отрезки $a = 3$, $b = -2$;
- д) проходящей через точку $A(3, 5)$ и параллельной оси Ox ;
- е) проходящей через точку $B(-1, 2)$ и параллельной оси Oy ;
- ж) проходящей через точку $A(1, -5)$ и параллельной прямой $x - 3y + 1 = 0$;
- з) проходящей через точку $A(2, 2)$ и параллельной прямой $x + y = 0$.

126. Установить, какие из следующих троек точек лежат на одной прямой:

- а) $(2, 1)$, $(-1, 4)$, $(-7, 10)$;
- б) $(0, 5)$, $(7, 1)$, $(-2, 3)$;
- в) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, 3)$;
- г) $(2, 1)$, $(10, 3)$, $(5, 2)$.

127. Дана прямоугольная декартова система Oij . Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2, 5)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

б) проходящей через точку $A(-1, -7)$ и перпендикулярной к вектору $\mathbf{n}\{1, -3\}$;

в) являющейся биссектрисой координатного угла (i, j) ;

г) проходящей через начало координат, образующей с осью Ox угол $\varphi = 30^\circ$ и проходящей в первой и третьей четверти;

д) проходящей через точку $A(2, 5)$ и параллельной биссектрисе координатного угла $(-i, j)$;

е) проходящей через точку $A(-3, 1)$ и перпендикулярной к прямой $x - 3y + 1 = 0$.

Решение.

а) Первый способ. Уравнение прямой с угловым коэффициентом записывается так: $y = kx + b$. В данном случае угловой коэффициент задан, поэтому для определения b достаточно в уравнение прямой подставить координаты точки $A(2, 5)$:

$$y = 3x + b; \quad 5 = 3 \cdot 2 + b; \quad b = -1.$$

Таким образом, данная прямая имеет уравнение $y = 3x - 1$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что эта прямая проходит через точку $A(2, 5)$.

Второй способ. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставив данные значения, получим:

$$y - 5 = 3(x - 2) \quad \text{или} \quad 3x - y - 1 = 0.$$

б) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной к вектору $\mathbf{n}\{\alpha, \beta\}$, записывается так: $(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta = 0$. Подставив данные значения, получаем: $(x + 1) \cdot 1 + (y + 7) \cdot (-3) = 0$, отсюда:

$$x - 3y - 20 = 0.$$

Проверка. Прямая (1) проходит через точку $A(-1, -7)$, так как $(-1) - 3 \cdot (-7) - 20 = 0$. Прямая

1) имеет направляющий вектор $p \{3, 1\}$. Вектор n перпендикулярен к прямой (1), так как

$$\cos(\hat{p}, n) = \frac{1 \cdot 3 - 3 \cdot 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = 0.$$

в) Биссектриса координатного угла (i, j) есть прямая, проходящая через начало координат и параллельная вектору $p = i + j$. Таким образом, данная прямая характеризуется начальной точкой $O(0, 0)$ и направляющим вектором $p \{1, 1\}$. Уравнение прямой запишется так:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} \text{ или } x - y = 0. \quad (2)$$

Проверка. Прямая (2) имеет направляющий вектор $p \{1, 1\}$, поэтому $\cos(i, p) = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\Rightarrow (i, p) = 45^\circ$. Кроме того, она проходит через начало координат, так как в уравнении (2) отсутствует свободный член.

г) Определим угловой коэффициент данной прямой:

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом записывается так: $y = kx + b$; в данном случае $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$. Так как данная прямая проходит через начало координат, то $b = 0$ и окончательно получаем: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Проверка. Достаточно убедиться в том, что прямая $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ образует с осью абсцисс угол $\varphi = 30^\circ$ и имеет точки в первой четверти. Направляющий вектор данной прямой имеет координаты: $p \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, поэтому

$$\cos(p, i) = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \varphi = 30^\circ.$$

Прямая проходит в первой четверти, так как точка первой четверти $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ лежит на ней.

д) Биссектриса координатного угла $(-i, j)$ параллельна вектору $p = j - i$, поэтому задача сводится к написанию

уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$ и параллельной вектору $p\{-1, 1\}$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда } x + y - 7 = 0. \quad (3)$$

Проверка. Прямая (3) проходит через точку $A(2, 5)$, так как $2 + 5 - 7 = 0$. Определим углы, образованные прямой (3) с осями координат. Очевидно, задача сводится к определению угла между векторами: $p\{-1, 1\}$ и $j\{0, 1\}$, $p\{-1, 1\}$ и $i\{1, 0\}$:

$$\cos(p, j) = \frac{(-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \Rightarrow (p, j) = 45^\circ.$$

$$\cos(p, i) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \Rightarrow (p, i) = 135^\circ.$$

е) Прямая $x - 3y + 1 = 0$ параллельна вектору $p\{3, 1\}$. Задача сводится к написанию уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3, 1)$ и перпендикулярной к вектору $p\{3, 1\}$:

$$(x + 3) \cdot 3 + (y - 1) \cdot 1 = 0 \text{ или } 3x + y + 8 = 0.$$

Предоставляем студенту-заочнику самостоятельно убедиться в правильности результата.

128. Дана прямоугольная декартова система Oij . Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку $A(2, -2)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$;

б) проходящей через точку $A(2, -5)$ и перпендикулярной к оси Oy ;

в) проходящей через точку $A(-1, -5)$ и перпендикулярной к вектору $n\{2, 1\}$;

г) проходящей через точку $A(5, 10)$ и перпендикулярной к прямой $x - y + 1 = 0$;

д) проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

129. В прямоугольной декартовой системе координат дана прямая $2x - 5y + 3 = 0$. Определить для этой прямой направляющий вектор p , нормальный вектор n , угловой коэффициент и отрезки, отсекаемые на осях координат. Построить данную прямую и векторы p и n .

130. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(2, -3)$ и $B(3, -5)$. Через середину отрезка AB провести прямую, перпендикулярную к AB .

131. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты вершин треугольника ABC : $A(1, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 2)$. Составить уравнения

а) высот треугольника;

б) прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

132. Даны две вершины треугольника $A(-1, 5)$ и $B(3, 2)$ и точка $H(5, -3)$ пересечения его высот. Составить уравнения его сторон.

133. Написать уравнения сторон квадрата, если сторона его равна a , а за оси прямоугольной декартовой

системы координат приняты его диагонали.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный квадрат, а O — точка пересечения его диагоналей (черт. 27). Очевидно,

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2} a}{2}.$$

Теперь легко записать уравнения сторон квадрата в отрезках:

$$(AB) \frac{x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} a} + \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2} a} = 1, \text{ или } x - y + \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0;$$

$$(BC) \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2} a} + \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2} a} = 1, \text{ или } x + y - \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0;$$

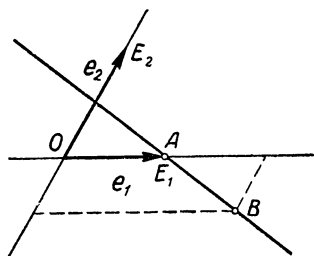
$$(CD) \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2} a} + \frac{y}{-\frac{\sqrt{2}}{2} a} = 1, \text{ или } x - y - \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0;$$

$$(DA) \frac{x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} a} + \frac{y}{-\frac{\sqrt{2}}{2} a} = 1, \text{ или } x + y + \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0.$$

Для того чтобы убедиться в правильности результатов, предлагаем студенту-заочнику определить координаты

точек A , B , C и D и подставить в полученные уравнения.

134. Написать уравнения всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$, если сторона шестиугольника равна a , а система прямоугольных декартовых координат выбрана так, что начало совпадает с точкой A , точка B лежит на положительном луче оси Ox , а точка E — на положительном луче оси Oy .



Черт. 28.

135. Взяв на плоскости общую аффинную систему координат, построить прямые, заданные уравнениями:

- а) $x + 2y - 1 = 0$;
- б) $x - 3y = 0$;
- в) $x - 5 = 0$;
- г) $x + 3 = 0$.

Решение. Ограничимся построением прямой а); остальные прямые предоставляем читателю построить самостоятельно.

Первый способ. Возьмем на прямой две произвольные точки, скажем $A(1, 0)$ и $B(2, -\frac{1}{2})$. Построив эти точки, проведем через них прямую (черт. 28).

Второй способ. Определим направляющий вектор прямой: $p\{-2, 1\}$ и произвольную точку $M_0(0, \frac{1}{2})$. Построив вектор p и точку M_0 , проводим через M_0 прямую, параллельную вектору p .

Третий способ. Уравнение данной прямой может быть записано так: $\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$. Отсюда видно, что пря-

мая отсекает на осях координат отрезки $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. Построив эти отрезки, проводим через их концы искомую прямую.

Существенно подчеркнуть, что на осях координат отрезки строятся в соответствующих единицах, т. е. на оси Ox в качестве единицы измерения следует взять отрезок

OE_1 , а на оси Oy — отрезок OE_2 . На чертеже 28 указан только первый способ построения.

136. Проверить, что четырехугольник $ABCD$, где $A(-2, -2)$, $B(-3, 1)$, $C\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ и $D(3, 1)$, является трапецией, и составить уравнение средней линии и диагоналей этой трапеции.

137. Даны уравнения двух смежных сторон параллелограмма: $x - y - 1 = 0$ и $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $F(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

Указание. Сначала определить координаты общей вершины искоемых сторон.

138. Вершины треугольника находятся в точках $A(-4, -5)$, $B(4, 1)$ и $C\left(-\frac{1}{2}, 7\right)$. Написать:

- а) уравнение биссектрисы внутреннего угла A ;
- б) уравнение медианы, проходящей через вершину A ;
- в) уравнение высоты, опущенной из вершины C .

Указание. Вектор $\vec{p} = \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC}$ является направляющим вектором биссектрисы внутреннего угла A .

§ 12. Взаимное расположение прямых

Литература: [1], часть 1, § 23, 24, 33, 34; [2], глава V, п. 93, 95; [3], § 41—43.

139. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые:

- а) $2x - 3y = 0$; г) $3y + 1 = 0$;
- б) $3x - y + 1 = 0$; д) $x + 2y = 0$;
- в) $5x - 1 = 0$; е) $6x = 0$.

140. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых и в случае пересечения определить координаты общей точки:

- а) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2y - 6 = 0$;
- б) $x + 2y + 1 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$;
- в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x - 3y + \sqrt{3} = 0$ и $x - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$.

Решение. Для исследования взаимного расположения двух прямых, заданных уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно поступить следующим образом.

Первый способ. Направляющие векторы p_1 и p_2 прямых имеют координаты $p_1 \{-B_1, A_1\}$ и $p_2 \{-B_2, A_2\}$. Если эти векторы не коллинеарны, то прямые пересекаются. Координаты точки пересечения могут быть определены совместным решением системы (1).

Если векторы p_1 и p_2 коллинеарны, то прямые либо параллельны, либо совпадают. В этом случае для выяснения взаимного расположения прямых необходимо взять произвольную точку M на одной из прямых и ее координаты подставить в уравнение другой прямой. Если уравнение удовлетворяется, то прямые совпадают; в противном случае прямые параллельны.

Второй способ. Из курса алгебры известно, что система (1) имеет единственное решение, если коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, т. е. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. В этом случае прямые (1) пересекаются. Координаты точки пересечения могут быть определены совместным решением данной системы.

Система (1) имеет бесчисленное множество решений, если все коэффициенты в уравнениях (1) пропорциональны, т. е. $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. В этом случае прямые совпадают.

Наконец, система (1) не имеет решений, если $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 \neq \lambda C_1$. В этом случае прямые параллельны.

Для студентов, знакомых с понятием ранга матрицы, можно указать еще один способ выяснения взаимного расположения двух прямых.

Третий способ. Рассмотрим матрицы.

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ранги этих матриц соответственно буквами r и R ; очевидно, $r \leq R \leq 2$. Возможны следующие случаи:

- 1) $r = R = 2$ — прямые пересекаются;
- 2) $r = R = 1$ — прямые совпадают;
- 3) $r = 1, R = 2$ — прямые параллельны.

Определим взаимное расположение прямых, заданных в примерах а), б) и в).

а) Воспользуемся первым способом. Направляющие векторы прямых имеют координаты $p_1 \{-1, 1\}$, $p_2 \{2, 2\}$. Прямые пересекаются, так как векторы p_1 и p_2 не коллинеарны. Решая совместно данную систему, получаем координаты точки пересечения $M(3, 0)$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что эта точка лежит на данных прямых.

б) Решим пример вторым способом. Отношение соответствующих коэффициентов при неизвестных равно единице, а отношение свободных членов равно $\frac{1}{3}$. Отсюда следует, что прямые параллельны.

в) Воспользуемся третьим способом. Рассмотрим матрицы:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -3 \\ 1 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -3 & \sqrt{3} \\ 1 & -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как эти матрицы имеют один и тот же ранг, равный единице, то прямые совпадают.

141. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

а) $y = 3$ и $x + y = 0$;

б) $x + y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$;

в) $x = 0$ и $x + 3 = 0$;

г) $\sqrt{5}x - 3y + 1 = 0$ и $\frac{5}{3}x - \sqrt{5}y + \frac{\sqrt{5}}{3} = 0$.

142. При каком значении параметра t прямые, заданные уравнениями:

$$3tx - 8y + 1 = 0 \text{ и } (1 + t)x - 2ty = 0,$$

параллельны?

143. Можно ли подобрать коэффициенты λ и μ так, чтобы прямые

$$3x - 2y + 1 = 0 \text{ и } \lambda x + \mu y - 3 = 0$$

совпадали?

Решение. Прямые совпадают в том и только в том случае, когда соответствующие коэффициенты в уравне-

ниях прямых пропорциональны. Обозначая через k коэффициент пропорциональности, получаем:

$$\lambda = 3k, \mu = -2k, -3 = k \cdot 1.$$

Отсюда получаем $\lambda = -9, \mu = 6$.

Проверка. Прямые

$$3x - 2y + 1 = 0, -9x + 6y - 3 = 0$$

совпадают, так как соответствующие коэффициенты пропорциональны.

144. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты λ и μ для того, чтобы прямые

$$\lambda x + \mu y + 1 = 0, 2x - 3y + 5 = 0 \text{ и } x - 1 = 0$$

имели общую точку?

145. Через точку $(1, 6)$ провести прямую так, чтобы середина ее отрезка, заключенного между двумя параллельными прямыми $x - 5y + 23 = 0, x - 5y + 11 = 0$, лежала на прямой $2x - y - 2 = 0$.

Указание. Пусть $y - 6 = k(x - 1)$ — уравнение искомой прямой. Определить координаты точек пересечения этой прямой с данными параллельными прямыми и потребовать, чтобы середина этого отрезка лежала на прямой. Из полученного условия определить k .

146. Провести прямую так, чтобы точка $A(1, 2)$ была серединой ее отрезка, заключенного между осями координат.

147. В пучке $x + 2y - 3 + \lambda(x - y + 1) = 0$ найти прямую, которая проходит через точку $M(4, 1)$.

Решение. Искомая прямая проходит через точку $M(4, 1)$, поэтому координаты точки M должны удовлетворять ее уравнению. Подставив в уравнение пучка вместо x и y координаты точки M , получим:

$$4 + 2 \cdot 1 - 3 + \lambda(4 - 1 + 1) = 0,$$

откуда $\lambda = -\frac{3}{4}$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получим уравнение искомой прямой:

$$x + 2y - 3 - \frac{3}{4}(x - y + 1) = 0$$

или

$$x + 11y - 15 = 0.$$

148. В пучке $2x - y + 1 + \lambda (3x - 2y + 5) = 0$ найти прямую, параллельную прямой $5x - 3y + 1 = 0$.

149. В пучке $\lambda (3x - 4y + 1) + x - y = 0$ найти прямую, проходящую через начало координат.

150. В пучке $\lambda (x - 2y + 1) + \mu (x - 3y) = 0$ найти прямую, параллельную оси Ox .

151. Через точку пересечения прямых

$$3x - y = 0, \quad x + 4y - 2 = 0 \quad (1)$$

провести прямую, перпендикулярную к прямой:

$$x + y = 0. \quad (2)$$

Решение. Первый способ. Определим координаты точки пересечения прямых (1), решая совместно данную систему уравнений: $\left(\frac{2}{13}, \frac{6}{13}\right)$. Проведем через эту точку прямую, перпендикулярную к прямой (2). Для этой цели заметим, что вектор $\rho \{1, 1\}$ перпендикулярен к прямой (2), поэтому параллелен искомой прямой:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{2}{13} & y - \frac{6}{13} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad x - y + \frac{4}{13} = 0.$$

Второй способ. Напишем уравнение пучка, определяемого прямыми (1):

$$3x - y + \lambda (x + 4y - 2) = 0. \quad (3)$$

Запишем далее условие перпендикулярности прямых (2) и (3):

$$1 \cdot (3 + \lambda) + 1(4\lambda - 1) = 0.$$

Отсюда получаем: $5\lambda + 2 = 0$ или $\lambda = -\frac{2}{5}$. Подставив это значение λ в уравнение (3), получаем искомое уравнение прямой:

$$13x - 13y + 4 = 0. \quad (4)$$

Проверка. 1) Прямые (1) и (4) пересекаются в одной точке, так как:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & +4 & -2 \\ 13 & -13 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 15 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Прямые (2) и (4) перпендикулярны, так как
 $13 \cdot 1 - 13 \cdot 1 = 0.$

Пользуясь уравнением пучка, решите следующие задачи:

152. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 5x + 4y - 17 = 0, \quad x - 4y + 11 = 0.$$

а) составить уравнения высот треугольника;

б) составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника, параллельно противоположным сторонам.

153. Через точку пересечения прямых $6x - 2y + 5 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$ провести прямую:

а) параллельную оси Ox ;

б) параллельную оси Oy ;

в) проходящую через начало координат.

154. Определить общую прямую следующих двух пучков:

$$\begin{aligned} (2 + 3\lambda)x - (4 - 7\lambda)y + \lambda &= 0, \\ (3 - 2\mu)x + (4 - 7\mu)y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

§ 13. Расстояние от точки до прямой: угол между прямыми¹

Литература: [1], часть I, § 27, 35; [2], глава V, п. 100—103; [3], § 44—48.

155. Определить расстояния от точек $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(1, 6)$ до прямой:

$$3x - 4y + 1 = 0.$$

156. Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$y - 2 = 0, \quad 4x - 2y - 24 = 0, \quad 4x - 11y + 30 = 0.$$

¹ Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, стороны AB , BC и CA которого заданы уравнениями

$$(AB) \quad y - 2 = 0, \quad (1)$$

$$(BC) \quad 4x - 2y - 24 = 0, \quad (2)$$

$$(CA) \quad 4x - 11y + 30 = 0. \quad (3)$$

Если H_1 — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую BC , то AH_1 — высота треугольника.

Длина отрезка AH_1 равна расстоянию от точки A до прямой BC . Уравнение прямой BC дано, поэтому для определения длины AH_1 достаточно найти координаты вершины A . Отсюда вытекает следующий план решения задачи.

а) Определяем координаты вершин треугольника, решая совместно уравнения (1), (2); (2), (3) и (3), (1).

б) Определяем расстояние от каждой вершины до противоположной стороны.

Решая систему:

$$y - 2 = 0, \quad (1)$$

$$4x - 11y + 30 = 0, \quad (3)$$

получаем координаты вершины $A(-2, 2)$.

Аналогично определяем координаты остальных вершин: $B(7, 2)$, $C(9, 6)$. Если AH_1 , BH_2 , CH_3 — длины высот треугольника, проведенных через вершины A , B и C , то

$$AH_1 = \frac{|4(-2) - 2 \cdot 2 - 24|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{36}{\sqrt{20}} = \frac{18\sqrt{5}}{5},$$

$$BH_2 = \frac{|4 \cdot 7 - 11 \cdot 2 + 30|}{\sqrt{16 + 121}} = \frac{36}{\sqrt{137}} = \frac{36\sqrt{137}}{137},$$

$$CH_3 = \frac{|6 - 2|}{1} = 4.$$

157. Даны две прямые своими уравнениями:

$$3x + 4y - 18 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 4y - 43 = 0.$$

Убедиться в том, что они параллельны, и определить расстояние между ними.

158. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

Указание. Координаты (x_1, y_1) искомой точки должны удовлетворять уравнению первой прямой и условию того, что она равноудалена от двух других прямых.

159. К окружности, имеющей центр в точке $(1, -2)$ и радиус, равный 5, провести касательные, параллельные прямой $3x + 4y + 1 = 0$.

Указание. Для решения задачи полезно сформулировать ее следующим образом: провести прямые, параллельные прямой $3x + 4y + 1 = 0$ и отстоящие от точки $(1, -2)$ на расстоянии 5.

160. Через точку $P(1, 1)$ провести касательные к окружности, имеющей центр в точке $C(1, -3)$, и радиус, равный $2\sqrt{2}$.

Указание. Уравнение искомой прямой записать в виде $y - 1 = k(x - 1)$ и потребовать, чтобы расстояние ее от точки C равнялось $2\sqrt{2}$.

161. Даны две окружности:

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0 \quad \text{и} \quad 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0.$$

а) Составить уравнение линии центров и уравнение прямой, соединяющей точки пересечения данных окружностей. Показать, что эти прямые взаимно перпендикулярны.

б) Определить координаты точки пересечения линии центров с прямой, соединяющей точки пересечения окружностей.

162. Даны две прямые $\sqrt{3}y - x = 12$ и $3x + 4y = 15$.

а) Написать уравнения биссектрис углов, образованных данными прямыми.

б) Найти угол между данными прямыми.

Решение. а) Биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от данных прямых. Если (X, Y) — произвольная точка, лежащая на одной из биссектрис, то

$$\frac{|\sqrt{3}Y - X - 12|}{\sqrt{3} + 1} = \frac{|3X + 4Y - 15|}{\sqrt{9 + 16}}. \quad (1)$$

Обратно, если координаты точки (X, Y) удовлетворяют уравнению (1), то она равноудалена от данных прямых и, следовательно, лежит на одной из биссектрис. Таким образом, соотношение (1) есть уравнение двух биссектрис углов, образованных данными прямыми.

Уравнение (1) эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$\frac{\sqrt{3} Y - X - 12}{2} = \frac{3X + 4Y - 15}{5},$$

$$\frac{\sqrt{3} Y - X - 12}{2} = -\frac{3X + 4Y - 15}{5},$$

или

$$11X + (8 - 5\sqrt{3})Y + 30 = 0,$$

$$-X - (8 + 5\sqrt{3})Y + 90 = 0.$$

б) Если прямые заданы уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то угол между ними может быть определен по формуле¹:

$$\cos \psi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Для данных прямых получаем:

$$\cos \psi = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{10} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}.$$

163. Составить уравнения прямых, отстоящих от прямой $4x - 3y - 7 = 0$ на расстоянии, равном 3.

164. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных прямых

а) $2x - 5y + 6 = 0$; $2x - 5y - 8 = 0$;

б) $3x + 5y + 8 = 0$; $3x + 5y + 2 = 0$.

165. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x - y + 7 = 0$ и $3x - 6y - 8 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2)$.

166. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $3x - y + 5 = 0$ и вершину прямого угла $C(4, -1)$.

Указание. Записать уравнения искомых прямых с угловыми коэффициентами и воспользоваться формулой: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

¹ См. [1], часть I, § 35.

167. Из точки $M(1, -2)$ под углом α к прямой $x + y - 1 = 0$ направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Определить уравнения прямых, на которых лежат падающий и отраженный лучи.

Указание. Для определения угловых коэффициентов иско-
мых прямых воспользоваться формулой: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k}{1 + kk_1}$. При этом
следует учесть, что если угол между прямой l и падающим на нее
лучом l_1 равен α , то угол между прямой l и отраженным лучом l_2
равен $180^\circ - \alpha$.

168. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

§ 14. Смешанные задачи на прямую

169. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 3 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $(-2, 0)$. Составить уравнения его диагоналей и остальных сторон. Определить координаты вершин квадрата.

170. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $x + 3y + 12 = 0$, $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $2x + y + 4 = 0$.

171. Вычислить площадь ромба, если известна его вершина $A(-1, 3)$, точка $M(0, 2)$, лежащая на стороне AB , и точка $Q(2, 1)$ пересечения его диагоналей.

172. Даны две смежные вершины квадрата: $A(3, -9)$ и $B(8, -14)$. Определить остальные вершины квадрата и составить уравнения его сторон.

173. Даны две вершины треугольника $A(1, 3)$ и $B(1, 5)$ и косинусы внутренних углов: $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Составить уравнения сторон треугольника.

174. Даны уравнения $x + 2y - 3 = 0$, $x + y - 2 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x + 6y - 15 = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны.

175. Дано уравнение стороны AB треугольника: $2x - 3y + 6 = 0$ и уравнение двух его высот: $(AH) 2x + y - 2 = 0$ и $(BK) x + 3y - 12 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

176. Даны вершины $A(-1, 4)$ и $B(0, 5)$ треугольника, площадь которого $S = 4$, и прямая $2x + y - 3 = 0$, на которой лежит третья вершина. Составить уравнения сторон треугольника.

177. Даны уравнения $x + y - 5 = 0$, $3x + y - 7 = 0$ двух медиан треугольника и уравнение одной из его сторон: $2x + y - 5 = 0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника и найти его вершины.

Указание. Две данные медианы пересекают данную сторону треугольника в двух точках. Эти точки могут быть либо обе вершинами, либо одна — вершиной, а другая — серединой стороны треугольника. В соответствии с этим получите три решения.

178. Составить уравнение окружности, касающейся двух данных прямых: $3x + 4y - 10 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$ и имеющей радиус, равный 5.

§ 15. Приложение теории прямой к решению задач элементарной геометрии

Литература: [1], часть I, § 26; [2], глава V, п. 96—99.

179. Доказать, что в любом треугольнике:

- а) медианы пересекаются в одной точке;
- б) высоты пересекаются в одной точке;
- в) биссектрисы пересекаются в одной точке.

Решение. Можно наметить следующий общий план для доказательства всех трех теорем.

1. Выбор системы координат. Для теоремы а) можно выбрать аффинную систему координат, а для теорем б) и в) — прямоугольную декартову. Следует учесть, что возможность выбора аффинной системы координат значительно упрощает решение задачи, так как систему можно наиболее тесно связать с данной фигурой.

2. Определение координат вершин треугольника в выбранной системе.

3. Составление уравнений медиан, высот или биссектрис.

4. Доказательство того, что три прямые (медианы, высоты или биссектрисы) принадлежат одному пучку.

Докажем каждую из теорем в отдельности.

а) Пусть ABC — произвольный треугольник. Точку A примем за начало аффинной системы координат, вектор \overrightarrow{AB} за базисный вектор e_1 и \overrightarrow{AC} — за e_2 .

В этой системе вершины треугольника, очевидно, будут иметь координаты: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

Пусть A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , CA и AB . Легко определить координаты этих точек

$$A_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B_1\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad C_1\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Таким образом, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 задаются уравнениями:

$$(AA_1) \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad x - y = 0,$$

$$(BB_1) \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad x + 2y - 1 = 0,$$

$$(CC_1) \begin{vmatrix} x & y-1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad 2x + y - 1 = 0.$$

Эти прямые проходят через одну точку, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

б) Пусть ABC — произвольный треугольник. Прямоугольную декартову систему возьмем так, чтобы начало совпало с точкой A и $i = \overline{AB}$. В этой системе вершины A и B имеют координаты: $A(0, 0)$, $B(1, 0)$. Обозначим координаты вершины C через (α, β) и запишем уравнения высот треугольника ABC .

Высота AN_1 есть прямая, проходящая через точку $A(0, 0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{BC} \{\alpha - 1, \beta\}$, поэтому она определяется уравнением:

$$(\alpha - 1)x + \beta y = 0.$$

Высота BH_2 есть прямая, проходящая через точку $B(1, 0)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{AC} \{\alpha, \beta\}$, поэтому она определяется уравнением:

$$\alpha(x - 1) + \beta y = 0.$$

Высота CH_3 есть прямая, проходящая через точку $C(\alpha, \beta)$ и перпендикулярная к вектору $\overline{AB}\{1, 0\}$, поэтому она определяется уравнением

$$x - \alpha = 0.$$

Эти прямые проходят через одну точку, так как

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta & 0 \\ \alpha - 1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно доказать третью теорему, выбрав систему координат так, как в случае б).

180. Пусть a и b — две произвольные прямые на плоскости, A, B, C — точки на прямой a , а D, E и F — точки на прямой b . Доказать, что точки пересечения прямых: 1) AD и CE ; 2) BD и CF ; 3) BE и AF лежат на одной прямой (теорема Паппа)¹.

Указание. Если прямые a и b пересекаются, то за начало аффинной системы координат взять точку их пересечения O и положить $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OD}$. Если прямые a и b параллельны, то за начало аффинной системы взять точку A и положить $e_1 = \overline{AB}$, $e_2 = \overline{AD}$.

181. В плоскости треугольника ABC дана точка M . Построены точки A_1, B_1, C_1 , симметричные с точкой M относительно середин сторон BC, CA, AB треугольника. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

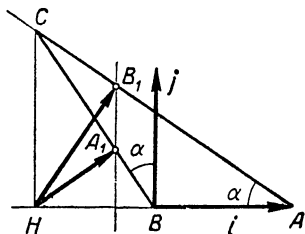
Указание. За начало аффинной системы координат принять точку A и положить $\overline{AB} = e_1$, $\overline{AC} = e_2$.

182. В треугольнике ABC разность углов B и A равна 90° . Из основания H высоты CH опущены на стороны AC и BC перпендикуляры, которые пересекают эти стороны соответственно в точках B_1 и A_1 . Доказать, что прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны.

¹ Здесь предполагается, что все три пары прямых AD и CE ; BD и CF ; BE и AF соответственно пересекаются в трех различных точках. Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно сформулировать и доказать теорему Паппа для того случая, когда одна или две из данных пар прямых не пересекаются.

Решение. В этой задаче выбор системы координат существенен, так как при неудачном ее выборе решение задачи значительно усложняется.

Так как $\angle B - \angle A = 90^\circ$, то желательно использовать перпендикуляр к BA , восставленный в точке B (черт. 29). Этот перпендикуляр образует с лучом BC угол $\alpha = \angle A$. Примем точку B за начало прямоугольной декартовой системы координат и векторы i, j возьмем так, как указано на чертеже 29. В этой системе точки A и B будут иметь координаты $A(1, 0)$, $B(0, 0)$.



Черт. 29.

Дальнейший план решения задачи таков.

1. Записав уравнения прямых AC и BC , определяем координаты точки C как точки пересечения этих прямых.

2. Определяем координаты точки H .

3. Определяем координаты точек B_1 и A_1 и по этим координатам обнаруживаем, что $AB \perp A_1B_1$.

Переходим к решению задачи.

1. Пусть $y = kx + b$ и $y = k'x + b'$ — уравнения прямых AC и BC . Так как прямые проходят соответственно через точки $A(1, 0)$ и $B(0, 0)$, то $b = -k$ и $b' = 0$, поэтому предыдущие уравнения имеют вид:

$$y = kx - k, \quad y = k'x.$$

Из геометрических соображений следует, что

$$k = \operatorname{tg}(180^\circ - A) = -\operatorname{tg} A, \quad k' = \operatorname{tg}(90^\circ + A) = -\operatorname{ctg} A,$$

отсюда: $kk' = 1$. Таким образом, получаем следующие уравнения прямых AC и BC :

$$(AC) \quad y = kx - k, \tag{1}$$

$$(BC) \quad y = \frac{1}{k}x. \tag{2}$$

Так как прямые (1) и (2) пересекаются, то их угловые коэффициенты не равны, т. е. $k \neq \frac{1}{k}$ или $k^2 - 1 \neq 0$ ¹.

¹ Это означает, что $\angle A \neq 45^\circ$. Если $\angle A = 45^\circ$, то $\angle B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, поэтому прямые AC и BC параллельны.

Решив совместно уравнения (1) и (2), получаем координаты их точки пересечения: $C\left(\frac{k^2}{k^2-1}, \frac{k}{k^2-1}\right)$.

2. Точки C и H лежат на одной прямой, параллельной оси ординат, и H лежит на оси абсцисс, поэтому

$$H\left(\frac{k^2}{k^2-1}, 0\right).$$

3. Запишем уравнения прямых HB_1 и HA_1 . Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых HA_1 и HB_1 , то в силу условий $HA_1 \perp BC$ и $HB_1 \perp AC$, получаем: $k_1 \cdot \frac{1}{k} = -1$ и $k_2 k = -1$. Отсюда: $k_1 = -k$, $k_2 = -\frac{1}{k}$. Имея координаты точки H и угловые коэффициенты k_1 и k_2 , легко записать уравнения прямых HA_1 и HB_1 :

$$(HA_1) \quad y = -k \left(x - \frac{k^2}{k^2-1} \right), \quad (3)$$

$$(HB_1) \quad y = -\frac{1}{k} \left(x - \frac{k^2}{k^2-1} \right). \quad (4)$$

Имея уравнения (1) — (4), можно определить координаты точек $A_1(x_1, y_1)$ и $B_1(x_2, y_2)$. Мы должны доказать, что $A_1B_1 \perp AB$ или $A_1B_1 \parallel$ оси Oy . Для этой цели достаточно показать, что $x_1 = x_2$.

Из уравнений (2) и (3) получаем: $x_1 = \frac{k^4}{(k^2-1)(k^2+1)}$.

Из уравнений (1) и (4) получаем: $x_2 = \frac{k^4}{(k^2-1)(k^2+1)}$. Задача решена.

183. Доказать, что центр S описанной окружности, ортоцентр H и центр тяжести G произвольного треугольника лежат на одной прямой¹ (*прямая Эйлера*).

Указание. Систему координат выбрать так, как в задаче 179 б, и использовать уравнения высот на стр. 71—72.

184. (Теорема Чевы). Пусть C_1 , A_1 и B_1 — три точки соответственно на сторонах AB , BC и CA треугольни-

¹ Ортоцентром треугольника называется точка пересечения высот; центром тяжести является точка пересечения медиан.

ка ABC . Для того чтобы прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 принадлежали одному пучку (т. е. пересекались в одной точке или были параллельны друг другу), необходимо и достаточно, чтобы

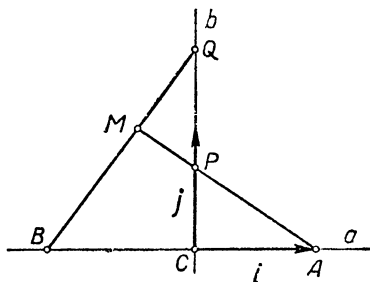
$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = -1.$$

(Отрезки считаются направленными).

Указание. Систему координат выбрать так, как в задаче 179 а.

185. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная.

186. Даны две взаимно перпендикулярные прямые a и b , пересекающиеся в точке C , и две точки A и B на прямой a . На прямой b берутся точки P и Q так, что $\frac{CP}{CQ} = k$. Доказать, что



Черт. 30.

геометрическое место точек пересечений прямых AP и BQ есть прямая.

Решение. Возьмем точку C за начало прямоугольной декартовой системы координат, а прямые a и b — за координатные оси (черт. 30). Если $i = \overline{CA}$, то точка A будет иметь координаты $(1, 0)$. Пусть $B(\alpha, 0)$. Если λ и λ' — ординаты точек Q и P , то из условий задачи следует, что $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{k}$, поэтому $\lambda' = k\lambda$. Таким образом, точки

P и Q будут иметь координаты: $P(0, k\lambda)$, $Q(0, \lambda)$. При изменении точек P и Q координата λ , очевидно, меняется.

Если $M(x, y)$ — произвольная точка искомого геометрического места, то, выразив x и y через координаты точек A , B и переменную величину λ , получим параметрическое задание искомого геометрического места (λ — параметр). Исключив λ , получим уравнение геометрического места в прямоугольных декартовых координатах.

Для осуществления этого плана найдем уравнения прямых AP и BQ . Имеем:

$$A(1, 0), \quad P(0, k\lambda), \quad B(\alpha, 0), \quad Q(0, \lambda).$$

Уравнения искоемых прямых имеют вид:

$$(AP) \quad \begin{vmatrix} x-1 & y \\ -1 & k\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } k\lambda x + y - k\lambda = 0; \quad (1)$$

$$(BQ) \quad \begin{vmatrix} x-\alpha & y \\ -\alpha & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda x + \alpha y - \alpha\lambda = 0. \quad (2)$$

Для определения координат точки пересечения $M(x, y)$ следует совместно решить систему (1), (2):

$$x = \frac{\alpha(k-1)}{k\alpha-1}, \quad y = \frac{k\lambda(\alpha-1)}{k\alpha-1}.$$

Так как выражение x не содержит λ , то $x = \frac{\alpha(k-1)}{k\alpha-1}$ есть уравнение искомого геометрического места. Этим уравнением задается прямая, параллельная прямой b .

187. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников, две вершины которых зафиксированы, а третьи вершины лежат на данной прямой l .

Указание. Аффинную систему координат взять так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой l .

Глава V

ИЗУЧЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

§ 16. Эллипс

Л и т е р а т у р а: [1], часть 1, § 37, 39 — 41, 45 — 47; [2], глава IV, п. 67 — 70, 83, 85, 87, 88; [3], § 49 — 56, 58, 60, 61, 76.

188. Составить каноническое уравнение эллипса по следующим данным:

- а) полуоси его равны 5 и 3;
- б) эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$, большая полуось $a = 3$;
- в) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

поэтому для решения задачи необходимо определить полуоси a и b .

- а) По условию $a = 5$, $b = 3$, поэтому уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- б) Как известно, для эллипса $c = \varepsilon a$ и $b^2 = a^2 - c^2$, отсюда следует, что

$$b^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2),$$

$$a = 3, \quad a^2 = 9, \quad b^2 = 9 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1.$$

в) Для того чтобы написать уравнение эллипса, необходимо определить большую полуось a :

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad 2a = 8, \quad c = 4, \\ a^2 = 9 + 16 = 25.$$

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

189. Определить фокусы, эксцентриситет и директрисы эллипса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

190. Составить каноническое уравнение эллипса, если
а) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

б) расстояние между его директрисами равно 32 и $e = \frac{1}{2}$.

191. Через точку $C(10, -8)$ провести касательную к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Если эллипс дан уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на этом эллипсе, то касательная, проходящая через эту точку, задается уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Пусть соотношение (1) является уравнением искомой касательной. Так как точка $C(10, -8)$ лежит на этой касательной и $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, то

$$\frac{10x_0}{25} - \frac{8y_0}{16} = 1, \text{ или } \frac{2x_0}{5} - \frac{y_0}{2} = 1. \quad (2)$$

Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на данном эллипсе, то

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1.$$

Решив совместно уравнения (2) и (3), получаем координаты двух точек касания:

$$M_0 \left(\frac{5(1 + \sqrt{7})}{4}, -1 + \sqrt{7} \right), \quad N_0 \left(\frac{5(1 - \sqrt{7})}{4}, -1 - \sqrt{7} \right).$$

Подставив эти значения, а также значения a и b в соотношение (1), получаем уравнения двух касательных:

$$\frac{1 + \sqrt{7}}{20} x + \frac{\sqrt{7} - 1}{16} y = 1; \quad \frac{1 - \sqrt{7}}{20} x - \frac{1 + \sqrt{7}}{16} y = 1.$$

Замечание. Если студенту-заочнику неизвестно уравнение касательной (1), то ему можно рекомендовать следующий способ решения той же задачи. Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через $C(10, -8)$:

$$y + 8 = k(x - 10) \quad (4)$$

и найдем угловой коэффициент k той прямой, которая касается данного эллипса. Для этого подставим значение y из уравнения (4) в уравнение эллипса и потребуем, чтобы полученное квадратное уравнение относительно x имело равные корни.

192. Найти те касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, которые параллельны прямой $2x - y + 17 = 0$.

193. Доказать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу равно квадрату малой полуоси.

Решение. Пусть эллипс задан уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокусы F_1 и F_2 этого эллипса имеют координаты: $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ данного эллипса и запишем уравнение касательной в этой точке:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad xx_0b^2 + yy_0a^2 - a^2b^2 = 0. \quad (1)$$

Расстояния этой касательной до фокусов F_1 и F_2 определяются соотношениями:

$$\rho_1 = \frac{|x_0 c b^2 - a^2 b^2|}{\sqrt{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4}}; \quad \rho_2 = \frac{|x_0 c b^2 + a^2 b^2|}{\sqrt{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4}}.$$

Отсюда:

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{|x_0 c b^2 - a^2 b^2| |x_0 c b^2 + a^2 b^2|}{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4} = \frac{|x_0^2 c^2 b^4 - a^4 b^4|}{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4}.$$

Учитывая, что $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, получаем: $y_0^2 a^2 = a^2 b^2 - x_0^2 b^2$.

Подставив это значение в предыдущее соотношение, будем иметь:

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{|x_0^2 c^2 b^4 - a^4 b^4|}{|x_0^2 b^4 + a^4 b^2 - x_0^2 b^2 a^2|} = \frac{|x_0^2 c^2 b^4 - a^4 b^4|}{|a^4 b^2 - x_0^2 b^2 c^2|} = b^2.$$

194. Доказать, что отрезок касательной к эллипсу в любой точке, заключенной между касательными, проведенными в вершинах, лежащих на большой оси, виден из фокусов под прямым углом.

195. Доказать, что всякая касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки прикосновения.

196. Вычислить длины полуосей и расстояние между фокусами эллипса, заданного в полярной системе уравнением: $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos \varphi}$. Предполагается, что за полюс принят один из фокусов F_1 эллипса, а за полярную ось — луч $F_1 F_2$, где F_2 — другой фокус эллипса.

Решение. Если точку F_1 принять за полюс полярной системы, а луч $F_1 F_2$ — за полярную ось, то полярное уравнение эллипса запишется так:

$$\rho = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi}, \quad (1)$$

где p — фокальный параметр эллипса (см. [1], § 47). Уравнение данного эллипса можно записать в виде:

$$\rho = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}\cos \varphi}.$$

Отсюда следует, что $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = \frac{3}{2} \sqrt{2}$. Таким образом,

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{2}; \quad p = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{2} \sqrt{2}; \quad 3a^2 - 4b^2 = 0;$$

$$b^2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} a.$$

Из этих соотношений получаем: $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$. Так как $c = \varepsilon a$, то $c = \sqrt{2}$ и $2c = 2\sqrt{2}$.

197. Написать канонические уравнения эллипсов, которые заданы полярными уравнениями:

$$\text{а) } \rho = \frac{3}{4 - \sqrt{13} \cos \varphi}, \quad \text{б) } \rho = \frac{1}{2 - \sqrt{3} \cos \varphi}.$$

§ 17. Гипербола и парабола

Литература: [1], часть 1, § 37, 42, 43, 45, 46, 47; [2], глава IV, п. 71—82, 85, 87, 88; [3], § 62—65, 67—72, 74—76.

198. Составить каноническое уравнение гиперболы по следующим данным.

а) Расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10.

б) Вещественная полуось равна 3, и гипербола проходит через точку $(6, 2\sqrt{3})$.

в) Расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Указание. Задача решается точно так же, как и задача 188.

199. Определить полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис и уравнения асимптот следующих гипербол:

$$\text{а) } 4x^2 - 9y^2 = 36, \quad \text{б) } 16x^2 - 9y^2 = 144.$$

Решение. Для решения задачи достаточно определить полуоси a и b и фокальное расстояние $2c$, так как по этим данным легко определить все, что требуется в задаче.

а) Запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$a = \sqrt{9} = 3; \quad b = \sqrt{4} = 2; \quad c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Если F_1 и F_2 фокусы гиперболы, то

$$F_1(\sqrt{13}, 0); \quad F_2(-\sqrt{13}, 0); \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Директрисами называются прямые, определяемые уравнениями: $x = -\frac{a}{e}$, $x = \frac{a}{e}$. В данном случае

$$x = -\frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = -\frac{9\sqrt{13}}{13}; \quad x = \frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

В данном случае $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$.

Пример 199 б) решите самостоятельно.

200. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

а) гипербола проходит через точки $(4, 0)$ и $(4\sqrt{17}, 4)$;

б) гипербола проходит через точку $(-5, 3)$ и имеет эксцентриситет $e = \sqrt{2}$;

в) гипербола имеет асимптоты $4y \pm 3x = 0$ и директрисы $5x \pm 16 = 0$;

г) гипербола является равнобочной и проходит через точку $(\sqrt{2}, 1)$.

201. Составить каноническое уравнение параболы, зная, что

а) расстояние фокуса от вершины равно 4;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс, проходит через начало координат и через точку $M(1, 2)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку $(5, 1)$;

г) парабола имеет фокус $F(0, -3)$, проходит через начало координат и ее осью служит ось ординат.

202. Доказать, что произведение расстояний любой касательной к гиперболе от двух ее фокусов есть величина постоянная.

203. Доказать, что отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке соприкосновения пополам.

204. Доказать, что всякая касательная к параболе составляет равные углы с фокальным радиусом точки касания и с лучом, проходящим через точку касания, параллельно оси параболы.

Решение. Пусть $y^2 = 2px$ — данная парабола, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ — фокус, а $yy_1 = p(x + x_1)$ — уравнение касательной, проведенной через точку $M_1(x_1, y_1)$ параболы¹.

Определим единичные векторы t_1 и f_1 , направленные вдоль касательной и фокального радиуса точки M_1 . Так как вектор $\{y_1, p\}$ параллелен касательной, то

$$t_1 \left\{ \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \frac{p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} \right\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\overline{M_1 F}}{|\overline{M_1 F}|}, \quad |\overline{M_1 F}| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2} = \\ &= \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = x_1 + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\overline{M_1 F} \left\{ \frac{p}{2} - x_1, -y_1 \right\}$, получим

$$f_1 \left\{ \frac{p - 2x_1}{p + 2x_1}, \frac{-2y_1}{p + 2x_1} \right\}.$$

Рассмотрим вектор $t_2 = i - f_1$. Этот вектор направлен вдоль одной из биссектрис угла, образованного фокальным радиусом точки касания и лучом, проходящим через точку касания, параллельно оси параболы. Вектор t_2 имеет координаты:

$$t_2 \left\{ 1 - \frac{p - 2x_1}{p + 2x_1}, \frac{2y_1}{p + 2x_1} \right\} \text{ или } t_2 \left\{ \frac{4x_1}{p + 2x_1}, \frac{2y_1}{p + 2x_1} \right\}.$$

¹ См. замечание к задаче 191.

Покажем, что векторы t_2 и t_1 коллинеарны. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} & \frac{p}{\sqrt{y_1^2 + p^2}} \\ \frac{4x_1}{p + 2x_1} & \frac{2y_1}{p + 2x_1} \end{vmatrix} = \\ = \frac{2}{(p + 2x_1) \sqrt{y_1^2 + p^2}} (y_1^2 - 2px_1) = 0,$$

так как M_1 лежит на параболе. Задача решена¹.

205. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра, если a и b — полуоси гиперболы.

206. Если три прямые l_1 , l_2 и l_3 , попарно пересекающиеся в точках A_1 , A_2 и A_3 , касаются параболы, то ортоцентр² треугольника $A_1A_2A_3$ лежит на директрисе данной параболы.

Решение. Пусть $y^2 = 2px$ — каноническое уравнение данной параболы, а $B_1(x_1, y_1)$, $B_2(x_2, y_2)$ и $B_3(x_3, y_3)$ — точки, в которых соответственно прямые l_1 , l_2 , l_3 касаются параболы. При этих обозначениях прямые l_1 , l_2 и l_3 имеют уравнения:

$$(l_1) \quad yy_1 = p(x + x_1), \quad (1)$$

$$(l_2) \quad yy_2 = p(x + x_2), \quad (2)$$

$$(l_3) \quad yy_3 = p(x + x_3). \quad (3)$$

Определим уравнение высоты h_1 , проведенной через точку A_1 . Если A_1 есть точка пересечения прямых l_2 и l_3 , то высоту h_1 можно определить как прямую пучка, определяемого прямыми l_2 и l_3 , перпендикулярную к прямой l_1 .

Пучок, определяемый прямыми l_2 и l_3 , имеет уравнение:

$$\lambda \{yy_2 - p(x + x_2)\} + \{yy_3 - p(x + x_3)\} = 0. \quad (4)$$

Прямые (1) и (4) перпендикулярны тогда и только тогда, когда $y_1(\lambda y_2 + y_3) + p(\lambda p + p) = 0$. Отсюда получаем:

¹ Задача может быть решена проще, если воспользоваться элементарно-геометрическими соображениями. См., например, [1], часть 1, § 45 или [3], § 75.

² То есть точка пересечения высот.

$$\lambda = -\frac{p^2 + y_1 y_3}{y_1 y_2 + p^2}.$$

Подставив это значение в соотношение (4), получаем уравнение высоты h_1 :

$$-\frac{y_1 y_3 + p^2}{y_1 y_2 + p^2} \left\{ y y_2 - p(x + x_2) \right\} + \left\{ y y_3 - p(x + x_3) \right\} = 0$$

или

$$(y_1 y_3 + p^2) [y y_2 - p(x + x_2)] - (y_1 y_2 + p^2) [y y_3 - p(x + x_3)] = 0.$$

Учитывая, что $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$ и $x_3 = \frac{y_3^2}{2p}$, после элементарных преобразований получим:

$$p x y_1 (y_2 - y_3) + y p^2 (y_2 - y_3) - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} p (y_2 - y_3) - \frac{p^2}{2} (y_2 - y_3) (y_2 + y_3) = 0.$$

Так как для различных точек (x_2, y_2) и (x_3, y_3) $y_2 \neq y_3$, то после сокращения на $p(y_2 - y_3)$ будем иметь:

$$x y_1 + y p - \frac{y_1 y_2 y_3}{2p} - \frac{p y_2}{2} - \frac{p y_3}{2} = 0. \quad (5)$$

Эта прямая пересекается с директрисой $x = -\frac{p}{2}$ в точке

$$Q\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}\right).$$

Координаты точек B_1, B_2 и B_3 входят в полученное выражение симметрично, поэтому для других высот треугольника $A_1 A_2 A_3$ получим те же значения координат точек пересечений с директрисой. Таким образом, все высоты проходят через одну и ту же точку директрисы. Задача решена.

207. Если AB — хорда конического сечения, проходящая через фокус F , то число $\frac{FA \cdot FB}{AB}$ не зависит от выбора хорды. Доказать.

Решение. Пусть F' другой фокус данного конического сечения. Если за полюс принять фокус F , а за по-

лярную ось — луч FF' , то уравнение конического сечения запишется так:

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Обозначим через (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) полярные координаты точек A и B . Очевидно, $\varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ$, поэтому

$$\rho_1 = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi_1}, \quad \rho_2 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi_1}.$$

Так как $FA = \rho_1$, $FB = \rho_2$ и $AB = \rho_1 + \rho_2$, то

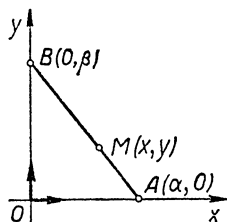
$$\frac{FA \cdot FB}{AB} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1}}{\frac{p(1 + \varepsilon \cos \varphi_1 + 1 - \varepsilon \cos \varphi_1)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi_1}} = \frac{p}{2}.$$

Аналогично решается следующая задача.

208. Доказать, что произведение длин перпендикуляров, опущенных из концов любой фокальной хорды на ось параболы, имеет постоянную величину.

§ 18. Задачи на геометрические места, приводящие к эллипсу, гиперболе и параболе

209. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. На отрезке или на его продолжении взята точка M ; найти траекторию, которую описывает точка M .



Черт. 31.

Решение. Данные взаимно перпендикулярные прямые примем за координатные оси (черт. 31). Пусть в некоторый произвольный момент времени концы скользящего отрезка AB имеют координаты $A(\alpha, 0)$, $B(0, \beta)$. Если (x, y) — координаты произвольной точки M геометрического места, l — длина отрезка AB , а λ — отношение, в котором точка M делит отрезок AB , то

$$x = \frac{\alpha}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{\lambda \beta}{1 + \lambda}, \quad l^2 = \alpha^2 + \beta^2. \quad (1)$$

Из этих соотношений, исключив α и β , получаем:

$$l^2 = (1 + \lambda)^2 x^2 + \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda^2} y^2$$

или

$$\frac{\frac{x^2}{l^2}}{(1 + \lambda)^2} + \frac{\frac{y^2}{\lambda^2 l^2}}{(1 + \lambda)^2} = 1. \quad (2)$$

Таким образом, если точка $M(x, y)$ принадлежит геометрическому месту, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2).

Докажем обратное предложение. Пусть $M(x, y)$ — некоторая точка плоскости, координаты которой удовлетворяют уравнению (2). Положим:

$$\alpha = x(1 + \lambda), \quad \beta = \frac{y(1 + \lambda)}{\lambda}, \quad (3)$$

где λ — данное отношение, в котором точка, описывающая искомую траекторию, делит отрезок AB .

Из соотношений (3) следует:

$$x = \frac{\alpha + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{0 + \lambda \beta}{1 + \lambda}.$$

Если обозначить через M_1 и M_2 точки с координатами $(\alpha, 0)$ и $(0, \beta)$, то предыдущие соотношения показывают, что M делит отрезок $M_1 M_2$ в отношении λ .

Точка M_1 лежит на оси абсцисс, а M_2 — на оси ординат; кроме того, в силу соотношений (3) и (2) имеем:

$$M_1 M_2 = \sqrt{x^2(1 + \lambda^2) + \frac{y^2(1 + \lambda)^2}{\lambda^2}} = \sqrt{l^2} = l.$$

Отсюда следует, что M принадлежит искомой траектории.

Уравнением (2) задается эллипс; в частном случае, при $\lambda = 1$ — окружность.

210. Найти геометрическое место середин хорд эллипса, проведенных из конца его малой оси.

211. Через одну из вершин гиперболы проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

212. Прямая a перемещается так, что треугольник, образованный ею с двумя взаимно перпендикулярными

прямыми l и m , сохраняет постоянную площадь σ . Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении λ отрезок, отсекаемый на прямой a , прямыми l и m .

У к а з а н и е. Принять взаимно перпендикулярные прямые за оси координат (см. решение задачи 209).

213. Прямой угол вращается около своей вершины, совпадающей с вершиной параболы. Доказать, что при этом движении прямая, соединяющая точки пересечения сторон угла с параболой, тоже вращается около некоторой точки, лежащей на оси параболы.

Р е ш е н и е. Пусть парабола дана своим каноническим уравнением $y^2 = 2px$. В этом случае, как известно, вершина параболы совпадает с началом координат O . Возьмем две произвольные ортогональные прямые, проходящие через начало координат. Если угловой коэффициент первой прямой обозначить через k , то угловой коэффициент второй прямой равен $-\frac{1}{k}$, поэтому прямые будут иметь уравнения:

$$y = kx, \quad y = -\frac{1}{k}x.$$

Определим точки пересечения рассматриваемых прямых с данной параболой, решая следующие системы:

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = kx, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = -\frac{1}{k}x, \end{cases}$$

$$P\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right); \quad Q(2pk^2, -2pk).$$

Напишем уравнение прямой PQ :

$$\begin{vmatrix} x - 2pk^2 & y + 2pk \\ 2p(k^4 - 1) & -2pk(k^2 + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$xk + y(k^2 - 1) - 2pk = 0, \quad (1)$$

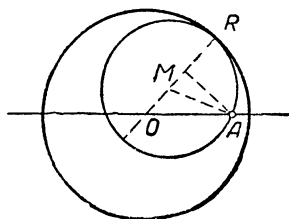
Положение этой прямой на плоскости зависит от k , т. е. от положения прямого угла POQ . Прямая (1) пересекает ось параболы ($y = 0$) в точке $R(2p, 0)$, которая не меняется при изменении k .

Таким образом, при вращении угла POQ вокруг точки O прямая (1) вращается вокруг точки R .

214. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности радиуса r и прямой l , проходящей через центр этой окружности.

215. Найти геометрическое место центров окружностей, которые касаются окружности радиуса r и проходят через точку A , лежащую внутри данной окружности.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, а M — произвольная точка геометрического места (черт. 32). Если окружность $M(MA)^1$ касается данной окружности $O(r)$ в точке R , то очевидно,



Черт. 32.

$$r = OR = OM + MR = OM + MA. \quad (1)$$

Докажем обратное предположение, то есть докажем, что если для некоторой точки M плоскости имеет место соотношение (1), то M принадлежит геометрическому месту точек.

Так как $OA < r$, то точка M не совпадает с точками O и A . В самом деле, если бы, например, M и O совпали, то из (1) следовало бы, что $r = OO + OA = OA$. Таким образом, $MA > 0$ и $OM < r$, т. е. M является внутренней точкой окружности.

Рассмотрим луч OM и обозначим через R точку пересечения этого луча с данной окружностью. Так как $OM + MR = r$ и $OM + MA = r$, то $MA = MR$. Это означает, что окружность $M(MR)$, которая касается окружности $O(OR)$, проходит через точку A .

Таким образом, мы доказали, что искомое геометрическое место совпадает с геометрическим местом точек, удо-

¹ $M(MA)$ — окружность с центром в точке M и радиуса MA .

влетворяющих условию (1). Этим условием задается эллипс, фокусами которого являются точки A и O , а большая ось равна r (фокальное свойство эллипса).

216. Решить предыдущую задачу в предположении, что точка A лежит вне данной окружности.

217. Найти геометрическое место середин фокальных радиусов всех точек эллипса (одной ветви гиперболы, параболы), проведенных из одного и того же фокуса.

У к а з а н и е. Воспользоваться полярной системой координат.

Глава VI

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [1], часть 1, § 49; [2], глава III п. 54 — 56; [3], § 27 — 31.

§ 19. Формулы преобразования координат точек

218. Написать формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости в каждом из следующих случаев, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

- а) $e_1'\{1, 3\}$, $e_2'\{0, 5\}$, $O'\{3, -1\}$;
- б) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'\{2, 5\}$;
- в) $e_1'\{4, -1\}$, $e_2'\{1, 1\}$, $O'\{0, 0\}$;
- г) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{1, 2\}$, $O'\{2, 0\}$;
- д) $e_1'\{-1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'\{0, -5\}$.

Решение. Если $e_1'\{x_1, \beta_1\}$, $e_2'\{x_2, \beta_2\}$, $O'\{x_0, y_0\}$ — координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, то, как известно, старые координаты точек выражаются через новые при помощи следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для выражения x' , y' через x , y следует решить эту систему относительно x' и y' . Система, очевидно, имеет единственное решение, так как $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

а) Пользуясь формулами (1), получаем:

$$\begin{aligned}x &= x' + 3, \\y &= 3x' + 5y' - 1.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить выражения x' , y' через x , y :

$$\begin{aligned}x' &= x - 3, \\y' &= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + 2.\end{aligned}$$

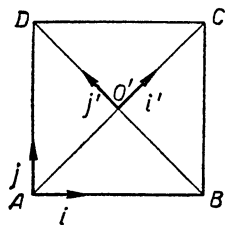
Остальные примеры решите самостоятельно.

219. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{array}{lll}\text{а) } x = x' - 3y'; & \text{б) } x' = x - 3; & \text{в) } x = x' - y' + 1; \\y = x' + y' + 1; & y' = y + 4; & y = y';\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}\text{г) } x' = x + y + 1; & \text{д) } x = x'; & \text{е) } x' = x - 2y; \\y' = x - 5; & y = y' + 1; & y' = x.\end{array}$$

220. Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной a . Написать формулы преобразования прямоугольных декартовых координат, если направленные прямые AB и AD являются осями координат в старой системе, а направленные прямые AC и BD — осями координат в новой системе.



Черт. 33.

Решение. Сначала определим координаты нового начала O' и новых координатных векторов i' и j' в старой системе (черт. 33). Точка O' пересечения диагоналей является началом новой системы координат. Очевидно,

$$O' \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right), \quad i' \left\{ \cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right\}, \quad j' \left\{ \cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4} \right\}$$

или

$$i' \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \quad j' \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Формулы преобразования имеют вид:

$$x = \frac{x' - y'}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}, \quad y = \frac{x' + y'}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}.$$

Аналогично решите следующие две задачи.

221. Дан треугольник ABC . Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы координат, для которой $O \equiv A$, $e_1 = \overline{AB}$, $e_2 = \overline{AC}$ к аффинной системе, для которой: $O' \equiv C$, $e_1' = \overline{CA}$, $e_2' = \overline{CB}$.

222. В заданном треугольнике OAB проведены медианы AD и BE , пересекающиеся в точке O' . Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы координат O , $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$ к аффинной системе O' , $e_1' = \overline{O'A}$, $e_2' = \overline{O'B}$.

223. В системе O , e_1 , e_2 точки A и B имеют координаты $(1, 1)$ и $(2, 2)$. Существует ли такая новая система координат, начало которой совпадает с началом старой системы и в которой точки A и B имеют координаты $(1, 1)$, $(-1, -2)$?

Решение. Пусть O , e_1' , e_2' — искомая система. Если $e_1' \{ \alpha_1, \beta_1 \}$, $e_2' \{ \alpha_2, \beta_2 \}$, то формулы преобразования имеют вид:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \quad y = \beta_1 x' + \beta_2 y'.$$

Так как точка A в обеих системах имеет координаты $(1, 1)$, то

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad 1 = \beta_1 + \beta_2. \quad (1)$$

С другой стороны, точка B в старой системе имеет координаты $(2, 2)$, а в новой системе координаты $(-1, -2)$, поэтому

$$2 = -\alpha_1 - 2\alpha_2, \quad 2 = -\beta_1 - 2\beta_2. \quad (2)$$

Из первых уравнений (1) и (2) получаем: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -3$. Из вторых уравнений (1) и (2) получаем: $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = -3$. Таким образом, векторы e_1' и e_2' имеют координаты: $e_1' \{ 4, 4 \}$, $e_2' \{ -3, -3 \}$. Отсюда следует, что e_1' и e_2' коллинеарны, что невозможно. Таким образом, новой системы координат, для которой точки A и B имели бы соответственно координаты $(1, 1)$ и $(-1, -2)$, не существует.

224. Даны две различные прямоугольные декартовы системы координат, причем вторая система получена из первой переносом начала в точку O' $(3, 4)$ (без изменения направления осей). Найти расстояние между двумя точ-

ками, имеющими одинаковые координаты (x_0, y_0) относительно рассматриваемых систем.

§ 20. Изменение уравнения геометрического места при преобразовании координат точек

225. В системе $O e_1 e_2$ дано геометрическое место точек уравнением: $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$.

Определить уравнение этого же геометрического места в аффинной системе $O'e_1'e_2'$, если $O'(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, $e_1' \{1, 1\}$, $e_2' \{1, 0\}$.

Решение. Запишем формулы преобразования координат (см. задачу 218).

$$x = x' + y' - \frac{1}{5}, \quad y = x' + \frac{3}{5}. \quad (1)$$

Для того чтобы получить уравнение геометрического места точек в новой системе, необходимо выражения x и y из соотношений (1) подставить в данное уравнение кривой:

$$9 \left(x' + y' - \frac{1}{5} \right)^2 - 4 \left(x' + y' - \frac{1}{5} \right) \left(x' + \frac{3}{5} \right) + \\ + 6 \left(x' + \frac{3}{5} \right)^2 + 6 \left(x' + y' - \frac{1}{5} \right) - 8 \left(x' + \frac{3}{5} \right) + 2 = 0.$$

Раскрыв скобки и сгруппировав подобные члены, окончательно получим:

$$11x'^2 + 9y'^2 + 14x'y' - 1 = 0.$$

226. В системе Oij дано геометрическое место точек уравнением: $4xy + 4y = 1$. Определить уравнение этого же геометрического места в новой прямоугольной декартовой системе, если

$$O'(-1, 0), \quad i' \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \quad j' \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

По уравнению определить геометрическое место точек.

227. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты двух фокусов $F_1(1, 3)$, $F_2(-1, 2)$ и точки $M(-1, 3)$ эллипса. Найти каноническое уравнение

эллипса и каноническую систему координат. Пользуясь формулами преобразования координат, определить уравнение эллипса в исходной неканонической системе координат.

Решение. По координатам двух фокусов легко определить фокальное расстояние.

$$2c = F_1F_2 = \sqrt{(1+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}.$$

С другой стороны, пользуясь фокальным свойством эллипса, получаем:

$$2a = F_1M + MF_2 = \sqrt{4+0} + \sqrt{0+1} = 3.$$

Таким образом, $a = \frac{3}{2}$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, поэтому $b = 1$. Если $O'i'j'$ — каноническая система координат для данного эллипса, то в этой системе эллипс задается уравнением

$$\frac{4}{9}x'^2 + y'^2 = 1. \quad (1)$$

Для канонической системы координат середина O' отрезка F_1F_2 является началом координат, направленная прямая F_2F_1 — осью абсцисс, а прямая, проходящая через O' и перпендикулярная к F_1F_2 , — осью ординат. Таким образом, если $O'(x_0, y_0)$, то

$$x_0 = \frac{1-1}{2} = 0, \quad y_0 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2},$$

$$i' = \frac{\overline{F_2F_1}}{|\overline{F_2F_1}|}, \quad i' = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}, \quad j' = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}.$$

Формулы преобразования имеют вид:

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'; \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{5}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$x' = \frac{2x + y - \frac{5}{2}}{\sqrt{5}}, \quad y' = \frac{-x + 2y - 5}{\sqrt{5}}.$$

Подставив эти значения в уравнение (1), после элементарных преобразований, получаем уравнение эллипса в исходной системе:

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 40y + 41 = 0.$$

Аналогично решите следующие две задачи:

228. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты двух фокусов $F_1(2, 4)$, $F_2(0, 3)$ и точка $M(0, 4)$ гиперболы.

Найти каноническое уравнение гиперболы и каноническую систему координат. Пользуясь формулами преобразования координат, определить уравнение гиперболы в исходной неканонической системе координат.

229. В прямоугольной декартовой системе координат даны фокус $F(1, -1)$, точка $M(2, 1)$ параболы и вектор $\mathbf{a} \{-1, 2\}$, определяющий направление оси параболы.

Определить уравнение параболы в исходной системе координат.

У к а з а н и е. Пользуясь координатами точки M , определить расстояние от фокуса до директрисы. Кроме того, учесть, что каноническая ось Ox' проходит через точку F .

230. Показать, что надлежащим подбором нового начала координат можно добиться того, чтобы при параллельном перенесении системы координат в уравнении кривой $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$ исчезли члены первой степени.

231. Парабола дана своим каноническим уравнением. Можно ли выбрать новую аффинную систему координат так, чтобы в этой системе уравнение параболы не содержало членов первой степени.

Р е ш е н и е. Рассмотрим параболу $y^2 = 2px$ в канонической системе координат Oij и поставим задачу: найти такую систему координат $O'e'_1e'_2$, в которой уравнение рассматриваемой параболы не содержит членов первой степени.

Пусть $O'(x_0, y_0)$, $e'_1\{\alpha_1, \beta_1\}$, $e'_2\{\alpha_2, \beta_2\}$, тогда формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение $y^2 = 2px$, получаем уравнение параболы в новой системе координат:

$$(\beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0)^2 = 2p(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0)$$

или

$$\beta_1^2 x'^2 + \beta_2^2 y'^2 + 2\beta_1\beta_2 x' y' + 2(\beta_1 y_0 - p\alpha_1) x' + \\ + 2(\beta_2 y_0 - p\alpha_2) y' + y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

Так как в этом уравнении коэффициенты при x' и y' должны быть равны нулю, то

$$\beta_1 y_0 - p\alpha_1 = 0, \quad \beta_2 y_0 - p\alpha_2 = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{y_0}{p} \cdot \beta_1, \quad \alpha_2 = \frac{y_0}{p} \cdot \beta_2,$$

но тогда $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, т. е. векторы e_1' и e_2' коллинеарны, что невозможно.

Мы пришли к выводу, что не существует такой системы координат, относительно которой уравнение параболы не содержало бы членов первой степени.

232. Показать, что существует такая прямоугольная¹ система координат, в которой уравнение эллипса (гиперболы) имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$ ($x^2 - y^2 = 1$).

233. В прямоугольной декартовой системе дана равнобочная гипербола $x^2 - y^2 = 1$. Определить уравнение этой гиперболы, если начало координат оставлено прежнее, а оси повернуты на 45° в отрицательном направлении².

234. Аффинная система координат выбрана так, что оси совпадают с асимптотами гиперболы. Каково уравнение гиперболы в этой системе?

Решение. Пусть Oe_1e_2 —исходная система координат, а $O'i'j'$ —каноническая система координат гиперболы, имеющей в этой системе уравнение:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

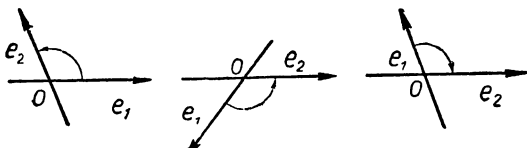
Так как O —точка пересечения асимптот, то O' и O совпадают. Векторы e_1 и e_2 параллельны асимптотам, поэтому $e_1 = \alpha(ai' + bj')$, $e_2 = \beta(ai' - bj')$ (см. задачу 199). Если x, y —координаты точки в исходной системе коор-

¹ Система прямоугольная, но не обязательно декартова, т. е. $e_1 \perp e_2$, но не обязательно $|e_1| = |e_2|$.

² Если на плоскости дана система координат Oe_1e_2 , то положительным направлением обхода будем считать то направление, по которому следует повернуть вектор e_1 до совпадения с направлением вектора e_2 по кратчайшему пути (см. черт. 34).

динат, а x' , y — координаты той же точки в канонической, то

$$\begin{aligned}x' &= \alpha ax + \beta ay, \\y' &= \alpha bx - \beta by.\end{aligned}$$



Черт. 34.

Подставив эти значения в каноническое уравнение гиперболы, после элементарных преобразований получаем:

$$xy = \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

Если, в частности, $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, то $xy = 1$.

235. Доказать, что геометрическое место точек, координаты которых в некоторой аффинной системе удовлетворяют уравнению $xy = 1$, есть гипербола.

236. Не приводя уравнения к каноническому виду и не вычисляя инвариантов, определить вид следующих кривых второго порядка:

- | | |
|--|---|
| а) $xy - x = 1$; | г) $x^2 + y + 1 = 0$; |
| б) $x^2 + y^2 - 2xy - \frac{1}{5} = 0$; | д) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y + 1 = 0$; |
| в) $xy - x = 0$; | е) $2x^2 + 5y^2 - 2xy - 1 = 0$. |

Решение. Если кривая задана уравнением в аффинной системе координат, то в отдельных случаях легко упростить уравнение кривой и определить ее вид, не прибегая к известным приемам. Для этого следует надлежащим образом сгруппировать члены, находящиеся в левой части уравнения, и путем введения новых переменных упростить уравнение кривой.

Рассмотрим пример а) $xy - x = 1$. Уравнение кривой может быть записано в виде: $x(y - 1) = 1$. Введем новые переменные x' и y' так, чтобы

$$x' = x, \quad y' = y - 1. \quad (1)$$

Легко показать, что существует новая система координат, при переходе к которой соотношения (1) являются формулами преобразования. В новой системе данная кривая имеет уравнение $x'y' = 1$. Этим уравнением задана гипербола (см. предыдущую задачу). Следовательно, исходным уравнением также задана гипербола.

При решении задач подобного рода существенно обратить внимание на следующее обстоятельство. Новые переменные x' , y' следует вводить так, чтобы формулы $x' = \varphi_1(x, y)$, $y' = \varphi_2(x, y)$ являлись формулами преобразования координат. Это означает, что функции φ_1 и φ_2 должны быть линейными, т. е. должны иметь вид:

$$\varphi_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1, \quad \varphi_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2$$

и, кроме того, необходимо выполнение условия

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим пример б) $x^2 + y^2 - 2xy - \frac{1}{5} = 0$.

Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$(x - y)^2 - \frac{1}{5} = 0.$$

Если ввести новые переменные x' , y' так, чтобы

$$x' = x - y, \quad y' = y, \tag{2}$$

то уравнение кривой в новой системе будет иметь вид:

$$x'^2 = \frac{1}{5}.$$

Этим уравнением задана пара параллельных прямых.

Рассмотрим другой способ упрощения уравнения той же кривой:

$$x^2 + y^2 - 2xy - \frac{1}{5} = 0, \quad (x - y)^2 - \frac{1}{5} = 0,$$

$$\left(x - y - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x - y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Если ввести новые переменные \tilde{x} , \tilde{y} так, чтобы

$$\tilde{x} = x - y - \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{y} = x - y + \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{3}$$

то уравнение кривой в новой системе будет иметь вид: $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = 0$. Кривая представляет собой пару пересекающихся прямых. Мы пришли в противоречие с предыдущим результатом. В чем причина этого?

Дело в том, что соотношения (2) могут служить формулами преобразования координат точек, а соотношения (3) таковыми не могут быть. В самом деле, определитель системы (2) не равен нулю, а определитель системы (3) равен нулю. (См. решение задачи 231.)

Предлагаем студенту-заочнику самостоятельно решить остальные примеры.

Глава VII

ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ¹

Литература: [1], часть 1, § 50—52; [2], глава VI, п. 105—116; [3], § 77—82; [17].

§ 21. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем параллельного переноса системы координат

Каждое из следующих уравнений кривых второго порядка привести к каноническому виду, пользуясь параллельным переносом координатной системы. Написать формулы преобразования координат; изобразить на чертеже новую систему координат и данную кривую.

$$237. x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 13 = 0.$$

Решение. а) Сгруппируем члены левой части данного уравнения относительно x и y следующим образом:

$$(x^2 - 6x + 9) + 6(y^2 + 2y + 1) - 2 = 0,$$

или

$$(x - 3)^2 + 6(y + 1)^2 - 2 = 0.$$

б) Введем обозначения: $x - 3 = x'$, $y + 1 = y'$. Отсюда получаем формулы параллельного переноса системы координат в точку $O'(3, -1)$:

$$x = x' + 3, \quad y = y' + (-1).$$

¹ Во всех задачах этой главы предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

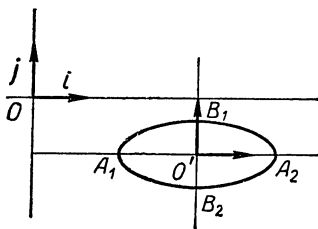
в) Уравнение данной кривой относительно системы $O'x'y'$ имеет вид:

$$x'^2 + 6y'^2 - 2 = 0, \text{ или } \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

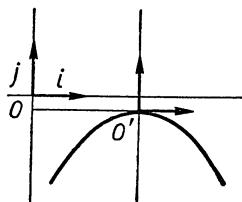
Мы получили каноническое уравнение эллипса.

г) Для того чтобы начертить кривую, возьмем новую систему координат и на канонических осях построим отрезки $A_1A_2 = 2\sqrt{2}$ и $B_1B_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ так, как это изображено на чертеже 35. Далее, строим эллипс, для которого отрезки A_1A_2 и B_1B_2 являются осями.

238. $2x^2 - 8x + 4y + 9 = 0.$



Черт. 35.



Черт. 36.

Решение. Задача решается аналогично предыдущей,

а) $2(x^2 - 4x + 4) + 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0,$

или

$$2(x - 2)^2 + 4\left(y + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

б) Введем обозначения: $x' = x - 2, \quad y' = y + \frac{1}{4}.$

Отсюда получаем формулы параллельного переноса системы координат в точку $O'\left(2, -\frac{1}{4}\right)$:

$$x = x' + 2, \quad y = y' - \frac{1}{4}.$$

в) Уравнение данной кривой в новой системе $O'x'y'$ имеет вид:

$$2x'^2 + 4y' = 0, \text{ или } x'^2 = -2y'.$$

Получили каноническое уравнение параболы.

г) На чертеже 36 дано изображение кривой в старой системе координат.

$$239. x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0.$$

Решение. Задача решается аналогично предыдущим:

$$а) (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0,$$

или

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0.$$

$$б) x' = x - 1, \quad y' = y + 2.$$

Отсюда:

$$x = x' + 1, \quad y = y' - 2, \quad O'(1, -2).$$

в) В новой системе получаем каноническое уравнение пары мнимых прямых, пересекающихся в начале координат:

$$x'^2 + y'^2 = 0.$$

Следующие задачи решите самостоятельно.

$$240. x^2 - \frac{1}{4}y^2 - x - \frac{3}{2}y - 1 = 0.$$

$$241. 3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0.$$

$$242. x^2 + 2y^2 - 4x - 12y + 23 = 0.$$

$$243. x^2 - 6x - 16 = 0.$$

$$244. 4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0.$$

$$245. x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0.$$

$$246. x^2 - 2y^2 + 2\sqrt{3}x + 20y - 47 = 0.$$

$$247. 2x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0.$$

§ 22. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем вращения системы координат

С помощью преобразования вращения системы координат вокруг начала привести к каноническому виду следующие уравнения кривых второго порядка. Написать формулы преобразования и изобразить данные кривые на чертеже.

$$248. \quad 9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y = 0.$$

Решение. Если кривая второго порядка в прямоугольной декартовой системе дана уравнением:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

где $a_{12} \neq 0$, то для упрощения этого уравнения сначала определяют угловые коэффициенты главных направлений по формулам:

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad k_2 = \frac{s_2 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (2)$$

Здесь s_1 и s_2 — корни характеристического уравнения:

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (3)$$

(см. [1], часть I, § 51).

Зная k_1 и k_2 , можно написать формулы преобразования координат:

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad k_2 = \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

Определяя $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, получим:

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \cdot x' - \sin \alpha \cdot y' \\ y &= \sin \alpha \cdot x' + \cos \alpha \cdot y'. \end{aligned}$$

Если систему координат повернуть так, чтобы новые оси имели главные направления, то уравнение кривой (1) в этой системе примет вид:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0, \quad (4)$$

где s_1, s_2 — корни характеристического уравнения (3),

$$a'_{13} = a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha; \quad a'_{23} = -a_{13} \sin \alpha + a_{23} \cos \alpha.$$

Если в исходном уравнении (1) $a_{13} = a_{23} = 0$, то из последних соотношений следует, что $a'_{13} = a'_{23} = 0$; поэтому уравнение (4) принимает более простой вид:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + a_{33} = 0. \quad (5)$$

Пользуясь этим планом, решим предложенную задачу.

а) Составим характеристическое уравнение данной кривой и найдем его корни:

$$s^2 - 10s = 0; \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 10.$$

б) Определим угловые коэффициенты главных направлений по формулам (2), стр. 104

$$k_1 = \frac{0-9}{-3} = 3, \quad k_2 = \frac{10-9}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3$. Отсюда легко получить:

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Формулы преобразования координат к новой системе, единичные векторы которой задают главные направления, имеют вид:

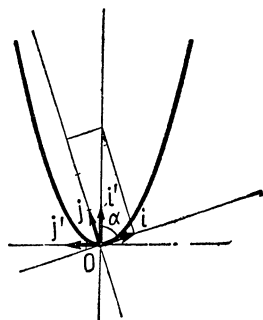
$$x = \frac{1}{\sqrt{10}} x' - \frac{3}{\sqrt{10}} y',$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{10}} x' + \frac{1}{\sqrt{10}} y'.$$

в) Относительно новой системы координат данная кривая определяется уравнением:

$$y'^2 = x'.$$

г) На чертеже 37 изображена данная парабола.



Черт. 37.

$$249. 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0.$$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение данной кривой и найдем его корни

$$s^2 - 10s + 9 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 9.$$

б) Относительно новой системы координат, единичные векторы которой имеют главные направления, данная кривая определяется уравнением (5), которая в данном случае имеет вид:

$$x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0.$$

Отсюда, разделив на 9, получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

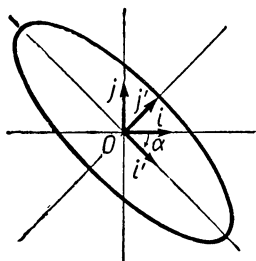
в) Для того чтобы написать формулы преобразования системы координат, найдем угловые коэффициенты главных направлений по формулам (2), стр. 104

$$k_1 = \frac{1-5}{4} = -1, \quad k_2 = \frac{9-5}{4} = 1.$$

Таким образом,

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1, \quad \alpha_1 = -45^\circ,$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 1, \quad \alpha_2 = 45^\circ.$$



Формулы преобразования будут иметь вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y',$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'.$$

Черт. 38.

г) На чертеже 38 изображен данный эллипс.

$$250. \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0.$$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение кривой и найдем его корни:

$$s^2 - 5s = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 5.$$

б) Относительно новой системы координат, единичные векторы которой имеют главные направления, данная кривая определяется уравнением:

$$0 \cdot x'^2 + 5y'^2 - 15 = 0, \quad \text{или} \quad y'^2 = 3.$$

Получили уравнение пары параллельных прямых.

в) Для определения формул преобразования найдем угловые коэффициенты главных направлений:

$$k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{4}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{5-4}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

В данном случае координаты единичного вектора $i' \{ \alpha, \beta \}$ удобнее определить из уравнений:

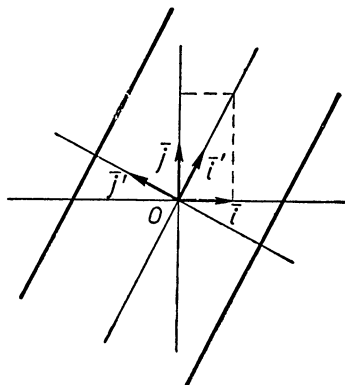
$$x^2 + \beta^2 = 1, \quad \beta = 2\alpha;$$

отсюда:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Вектор j' имеет координаты $j' \{ -\beta, \alpha \}$:

$$j' \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$



Формулы преобразования имеют вид:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y',$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y'.$$

Черт. 39.

г) На чертеже 39 дано изображение кривой. Следующие задачи решите самостоятельно.

251. $-23x^2 - 72xy - 2y^2 - 25 = 0.$

252. $x^2 - 14xy + 49y^2 - 50 = 0.$

253. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y = 0.$

254. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0.$

255. $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 25 = 0.$

$$256. 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$$

$$257. 2x^2 + 12xy - 7y^2 + 20 = 0.$$

$$258. x^2 + 2xy + y^2 = 0.$$

$$259. -17x^2 + 2\sqrt{35}xy + 17y^2 = 0.$$

§ 23. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

С помощью преобразования поворота системы координат и переноса начала привести к каноническому виду уравнения следующих кривых и написать формулы преобразования.

$$260. 40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0.$$

Решение. Задача упрощения общего уравнения кривой второго порядка решается следующим образом. С помощью преобразования поворота системы координат вокруг начала добиваемся того, чтобы в новой системе $Ox'y'$ в уравнении кривой отсутствовал член с произведением переменных xy (см. § 22). Далее, при помощи преобразования параллельного переноса приводим уравнение кривой к каноническому виду.

Решим предложенную задачу по намеченному плану.

а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$s^2 - 65s + 676 = 0; \quad s_1 = 52, \quad s_2 = 13.$$

б) Найдем единичные векторы главных направлений, соответствующие полученным характеристическим числам (см. § 22):

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}, \quad k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$e'_1 \left\{ \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}, \quad e'_2 \left\{ -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\}.$$

в) Найдем коэффициенты a'_{13} , a'_{23} при членах первой степени в новой системе. Для этого запишем найденные результаты в следующую таблицу:

	$e_1' \rightarrow s_1 = 52$	$e_2' \rightarrow s_2 = 13$
$a_{13} = -4$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$
$a_{23} = -7$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$

Во втором столбце таблицы записаны координаты вектора e_1' , а в третьем столбце — координаты вектора e_2' .

Из общей теории кривых второго порядка известно, что

$$a'_{i3} = a_{13}p_{i1} + a_{23}p_{i2},$$

где p_{i1} и p_{i2} координаты вектора e_i' .

Следовательно, коэффициент a'_{i3} равен сумме произведений соответствующих элементов первого и $(i+1)$ -го столбцов таблицы. В данном случае

$$a'_{13} = -2\sqrt{13}, \quad a'_{23} = -\sqrt{13}.$$

Уравнение данной кривой в новой системе $Ox'y'$ в общем виде запишется так:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0.$$

Подставив сюда найденные значения, получаем следующее уравнение:

$$52x'^2 + 13y'^2 - 4\sqrt{13}x' - 2\sqrt{13}y' + 1 = 0.$$

г) Совершим преобразование параллельного переноса (см. § 21):

$$\begin{aligned} & 52 \left(x'^2 - \frac{\sqrt{13}}{13}x' + \frac{1}{52} \right) + 13 \left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{13}}y' + \frac{1}{13} \right) + \\ & + 1 - 1 - 1 = \\ & = 52 \left(x' - \frac{1}{2\sqrt{13}} \right)^2 + 13 \left(y' - \frac{1}{\sqrt{13}} \right)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения:

$$\tilde{x} = x' - \frac{1}{2\sqrt{13}}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{1}{\sqrt{13}},$$

то в новой системе с началом в точке $O'\left(\frac{1}{2\sqrt{13}}, \sqrt{13}\right)$ уравнение кривой будет иметь вид:

$$52\tilde{x}^2 + 13\tilde{y}^2 = 1, \text{ или } \frac{\tilde{x}^2}{\frac{1}{52}} + \frac{\tilde{y}^2}{\frac{1}{13}} = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса.

д) Определим формулы преобразования координат при переходе от исходной системы Oxy к системе $O'\tilde{x}\tilde{y}$. Так как

$$x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y', \quad y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'$$

и

$$x' = \tilde{x} + \frac{1}{2\sqrt{13}}, \quad y' = \tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{13}},$$

то

$$x = \frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{x} - \frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{y} - \frac{1}{26},$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{13}}\tilde{x} + \frac{3}{\sqrt{13}}\tilde{y} + \frac{42}{13}.$$

$$261. \quad 2xy + 4x + 2y + 5 = 0.$$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$s^2 - 1 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = -1.$$

б) Найдем единичные векторы главных направлений, соответствующие полученным характеристическим числам:

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}} = 1, \quad k_2 = -1.$$

Отсюда будем иметь:

$$e'_1 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \quad e'_2 \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

в) Найдем коэффициенты a'_{13} , a'_{23} при членах первой степени в новой системе. Для этого запишем найденные значения в следующую таблицу:

	$e_1 \rightarrow s_1 = 1$	$e_2 \rightarrow s_2 = -1$
$a_{13} = 2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$a_{23} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Отсюда получаем: $a'_{13} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $a'_{23} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. предыдущую задачу, пункт в).

Уравнение данной кривой в новой системе $Ox'y'$ запишется так:

$$x'^2 - y'^2 + 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 5 = 0.$$

г) Совершим преобразование параллельного переноса (см. § 21):

$$\begin{aligned} \left(x'^2 + 2 \cdot x' \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{18}{4}\right) - \left(y'^2 + 2 \cdot y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) + 5 - \\ - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 0, \\ \left(x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$\tilde{x} = x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \tilde{y} = y' + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то в новой системе координат с началом в точке $O' \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ уравнение кривой примет вид:

$$\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1 = 0.$$

Положив $x^* = \tilde{y}$ и $y^* = \tilde{x}$, получим каноническое уравнение гиперболы: $x^{*2} - y^{*2} = 1$.

д) Определим формулы преобразования при переходе от исходной системы Oxy к системе $O'x^*y^*$. Так как

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y', \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y';$$

$$x' = \tilde{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y' = \tilde{y} - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } x^* = \tilde{y}, \quad y^* = \tilde{x},$$

то

$$x' = -\frac{\sqrt{2}}{2} x^* + \frac{\sqrt{2}}{2} y^* - 1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} x^* + \frac{\sqrt{2}}{2} y^* - 2.$$

$$262. 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$s^2 - 5s = 0; \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 5.$$

б) Найдем единичные векторы главных направлений:

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}} = 2, \quad k_2 = \frac{s_2 - a_{11}}{a_{12}} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$e_1' \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}, \quad e_2' \left\{ -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}.$$

в) Найдем коэффициенты a'_{13} , a'_{23} при членах первой степени (см. решение предыдущей задачи):

$$a'_{13} = -\frac{15}{\sqrt{5}}, \quad a'_{23} = -\frac{5}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение данной кривой в новой системе примет вид:

$$5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}} x' - \frac{10}{\sqrt{5}} y' + 7 = 0.$$

г) Совершим преобразование параллельного переноса

$$5 \left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \frac{1}{5} \right) - \frac{30}{\sqrt{5}} x' + 6 = 0,$$

$$5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0.$$

Если ввести обозначения

$$\tilde{x} = x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \tilde{y} = y' - \frac{1}{\sqrt{5}},$$

то в новой системе, с началом в точке $O' \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, уравнение кривой примет вид:

$$\tilde{y}^2 = \frac{6}{\sqrt{5}} \tilde{x}.$$

Мы получили каноническое уравнение параболы.

д) Формулы преобразования предоставляем определить читателю.

Следующие задачи решите самостоятельно.

263. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

264. $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0.$

265. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 + 2xy - 2x - 2\sqrt{3}y = 0.$

266. $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0.$

267. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0.$

268. $25x^2 + 40y^2 + 36xy - 34x - 116y + 89 = 0,$

269. $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 66y - 88x + 121 = 0.$

Глава VIII

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ОБЩЕМУ УРАВНЕНИЮ

§ 24. Пересечение с прямой; асимптотические направления и асимптоты¹

Литература: [1], часть I, § 60, 61, 64, 65; [2], глава VI, п. 117—123; [3], § 83.

270. Определить точки пересечения кривой второго порядка $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 = 0$ с прямой $x + y - 2 = 0$.

271. Дана кривая второго порядка:

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 2x - y + 1 = 0.$$

Выяснить, какие из векторов $a \{1, 2\}$, $b \{3, -4\}$, $c \{7, 1\}$, $d \{2, 0\}$, $e \{-1, 1\}$ имеют асимптотическое направление относительно данной кривой.

272. Найти векторы асимптотического направления кривой второго порядка: $4x^2 - 3xy - y^2 - x - 2y + 1 = 0$.

Решение. Для того чтобы вектор $a \{\alpha, \beta\}$ имел асимптотическое направление относительно кривой

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$P = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0. \quad (2)$$

Исследуем это соотношение. Возможны два случая:

1) $a_{22} \neq 0$. В этом случае, очевидно, $\alpha \neq 0$, так как в

¹ Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается аффинной.

противном случае $\alpha = \beta = 0$. Разделив уравнение (2) на α^2 , получаем:

$$a_{11} + 2a_{12} \frac{\beta}{\alpha} + a_{22} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 = 0.$$

Отсюда определяем угловые коэффициенты векторов асимптотических направлений.

2) $a_{22} = 0$. Уравнение (2) принимает вид:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta = 0. \quad (3)$$

Откуда получаем $\alpha_1 = 0$, β_1 — произвольное.

Для определения другого асимптотического направления разделим соотношение (3) на α^2 :

$$a_{11} + 2a_{12}k = 0,$$

где $k = \frac{\beta}{\alpha}$.

При $a_{12} \neq 0$ будем иметь: $k = -\frac{a_{11}}{2a_{12}}$. Если $a_{12} = 0$, то $a_{11} \neq 0$ (все коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{12} не могут быть равны нулю), поэтому второго асимптотического направления не существует.

Найдем асимптотические направления для данного примера. Условие (2) принимает вид:

$$4\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta^2 = 0.$$

Так как $a_{22} = -1 \neq 0$, то $\alpha \neq 0$, поэтому, разделив на α^2 и положив $\frac{\beta}{\alpha} = k$, получаем:

$$k^2 + 3k - 4 = 0,$$

$k_1 = -4$, $k_2 = 1$. Векторами асимптотического направления будут: $p_1 \{1, -4\}$, $p_2 \{1, 1\}$ и любые ненулевые векторы, им коллинеарные.

273. Найти векторы асимптотического направления для следующих кривых второго порядка:

- а) $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$;
- б) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$;
- в) $x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x + 5 = 0$;
- г) $x^2 - 2xy + 5x - y = 0$;
- д) $y^2 + 5x - 3y - 1 = 0$.

274. Написать уравнения асимптот следующих кривых второго порядка:

а) $2x^2 + 3xy + y^2 - 2x + y = 0$;

б) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$;

в) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

г) $2x^2 + xy + y^2 + 11x - 4y + 5 = 0$.

Решение. Если кривая второго порядка задана уравнением (1) и вектор $p\{\alpha, \beta\}$ имеет асимптотическое направление (задача 272), то асимптота кривой, параллельная вектору p , задается уравнением:

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \beta(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \quad (1)$$

При изучении вопроса о наличии асимптот рассматривают три случая:

1) Коэффициенты при x и y в уравнении (1) одновременно не равны нулю. В этом случае кривая имеет одну асимптоту, параллельную вектору p . Эта асимптота задается уравнением (1).

2) Коэффициенты при x и y в уравнении (1) равны нулю, а свободный член отличен от нуля. Кривая не имеет асимптот, параллельных вектору p .

3) Все коэффициенты в уравнении (1) равны нулю. В этом случае всякая прямая, параллельная вектору p , является асимптотой.

В примере а) находим угловые коэффициенты вектора асимптотических направлений $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. Отсюда определяем векторы асимптотических направлений $p_1\{-1, 2\}$, $p_2\{1, -1\}$. Уравнения асимптот данной кривой имеют вид:

$$-1\left(2x + \frac{3}{2}y - 1\right) + 2\left(\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$1\left(2x + \frac{3}{2}y - 1\right) - 1\left(\frac{3}{2}x + y + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$x + \frac{1}{2}y + 2 = 0, \quad \text{или} \quad 2x + y + 4 = 0;$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0, \quad \text{или} \quad x + y - 3 = 0.$$

Остальные примеры решите самостоятельно.

275. Назовите кривые второго порядка, имеющие:

- а) два асимптотических направления и две асимптоты;
- б) одно асимптотическое направление и бесчисленное множество асимптот;
- в) одно асимптотическое направление и ни одной асимптоты.

276. Используя понятие асимптотических направлений, показать, что кривая $x^2 - x + y = 0$ не эллипс и не гипербола, а кривая $xy + x + 1 = 0$ не парабола и не эллипс.

277. Ответьте на следующие вопросы:

- а) Каково условие того, что ось Ox имеет асимптотическое направление относительно данной кривой?
- б) Каково условие того, что ось Ox является асимптотой данной кривой?
- в) Каково условие того, что оси координат являются асимптотами кривой?

278. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(0, -5)$ и имеющей асимптоты

$$x - 1 = 0, \quad 2x - y + 1 = 0.$$

§ 25. Центр и диаметры

Литература: [1], часть I, § 58, 59, 62; [2], глава VI, п. 129 — 134; [3], § 59, 66, 73, 78, 84.

279. Найти центр кривой второго порядка:

$$3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0.$$

Решение. Если кривая второго порядка задана уравнением:

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

то для того, чтобы точка $C(x_0, y_0)$ являлась центром данной кривой, необходимо и достаточно, чтобы x_0, y_0 удовлетворяли системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F'_{x_0} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ F'_{y_0} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Составим эту систему уравнений для данной кривой:

$$3x_0 - 6y_0 + 1 = 0, \quad -6x_0 + 6y_0 - 1 = 0.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то она имеет единственное решение: $x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{1}{6}$.

280. Найти центр следующих кривых:

а) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0;$

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0;$

в) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0.$

281. Доказать, что если кривая второго порядка имеет две непараллельные асимптоты, то точка пересечения этих асимптот есть центр кривой.

282. Каково условие того, что ось Ox является линией центров кривой второго порядка?

Решение. Если кривая задана уравнением (1), то координаты центра определяются уравнениями (2) (см. задачу 279).

Так как ось Ox является линией центров, то из уравнений (2) следует, что $a_{21} = a_{23} = 0$ и $a_{11} = a_{13} = 0$. Таким образом, уравнение кривой может быть записано в виде: $a_{22}y^2 + a_{33} = 0$. Очевидно, справедливо и обратное предложение.

Мы пришли к следующей теореме: *для того чтобы кривая имела линию центров, совпадающую с осью Ox , необходимо и достаточно, чтобы в уравнении кривой*

$$a_{11} = a_{21} = a_{23} = a_{13} = 0.$$

283. Доказать, что если кривая имеет линию центров, то она распадается на пару параллельных или совпавших прямых.

Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

284. Как подобрать значения коэффициентов a и b в уравнении

$$x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0,$$

чтобы оно изображало: а) центральную кривую; б) кривую без центра; в) кривую с прямой центров?

285. Определить тот диаметр кривой

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 3 = 0,$$

который проходит через точку (2, 2).

Решение. Первый способ. Если кривая задана уравнением (1) (задача 279), то диаметр, сопряженный хордам направления $p \{ \alpha, \beta \}$, имеет уравнение:

$$\alpha (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \beta (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0.$$

В данном случае это уравнение принимает вид:

$$\alpha (2x - 2y) + \beta (-2x + 5y) = 0.$$

Так как точка (2, 2) принадлежит этому диаметру, то

$$\alpha (4 - 4) + \beta (-4 + 5 \cdot 2) = 0 \text{ или } \beta = 0.$$

Таким образом, искомый диаметр имеет уравнение:

$$x - y = 0.$$

Второй способ. Данная кривая центральная. Центр ее, как нетрудно видеть, совпадает с началом координат. Все диаметры центральной кривой проходят через ее центр. Таким образом, искомый диаметр определяется точками (0, 0) и (2, 2):

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2}; \quad x - y = 0.$$

286. Найти два сопряженных диаметра кривой

$$xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0,$$

из которых один параллелен оси Oy .

287. Дана кривая второго порядка

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2(Ax + By + C) = 0.$$

Доказать, что прямая $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ является одним из диаметров кривой.

288. Ответить на следующие вопросы:

- Для каких кривых все диаметры параллельны?
- Для каких кривых все диаметры совпадают?
- Каково условие того, что ось Ox является одним из диаметров данной кривой?

§ 26. Сопряженные направления; главные направления и главные диаметры

Литература: [1], часть I, § 63; [2], глава VI, п. 135, 136.

289. Дана кривая второго порядка

$$x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$$

и векторы $a_1 \{1, 1\}$, $a_2 \{2, 3\}$, $a_3 \{-1, 1\}$, $a_4 \{2, 0\}$. Определить векторы a'_1 , a'_2 , a'_3 и a'_4 , сопряженные с каждым из соответствующих векторов в отдельности.

Решение. Два вектора $p \{p_1, p_2\}$ и $q \{q_1, q_2\}$ называются сопряженными относительно кривой (1) (задача 279), если выполнено условие:

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0.$$

Подставив сюда значения коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} , получаем:

$$p_1q_1 + \frac{1}{2}p_1q_2 + \frac{1}{2}p_2q_1 + 2p_2q_2 = 0,$$

$$(2p_1 + p_2)q_1 + (p_1 + 4p_2)q_2 = 0.$$

Определим координаты вектора a'_1 . Для этой цели подставим в предыдущее соотношение значения: $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ (координаты вектора a_1): $3q_1 + 5q_2 = 0$. Отсюда получаем: $a'_1 \{-5, 3\}$. Аналогично определим координаты векторов a'_2 , a'_3 , a'_4 .

290. Найти направление хорд, сопряженных диаметру

$$2x + y - 3 = 0$$

относительно кривой $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$.

291. Найти главные направления следующих кривых второго порядка:

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$;

в) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$;

г) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$;

д) $x^2 + xy + 2y^2 - 3x + y = 0$.

Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Из общей теории кривых второго порядка известно, что для того чтобы вектор $\{p_1, p_2\}$ имел главное направление относительно кривой второго порядка (1) (задача 279), необходимо и достаточно, чтобы

$$(a_{22} - a_{11})p_1p_2 + a_{12}(p_1^2 - p_2^2) = 0. \quad (1)$$

Пользуясь этим соотношением, легко определить главные направления данных кривых:

$$а) (5 - 5) p_1 p_2 + 4 (p_1^2 - p_2^2) = 0,$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 0, (p_1 - p_2) (p_1 + p_2) = 0.$$

Отсюда получаем два вектора: $\{1, 1\}$, $\{-1, 1\}$.

б) $(4 - 1) p_1 p_2 - 2 (p_1^2 - p_2^2) = 0$. Так как $p_1 \neq 0$, то, разделив на p_1^2 , получаем:

$$3 \frac{p_2}{p_1} - 2 + 2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 = 0, \text{ или } 2k^2 + 3k - 2 = 0,$$

где $k = \frac{p_2}{p_1}$. Решив квадратное уравнение, получаем:

$k_1 = -2$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Векторы главных направлений имеют координаты: $\{1, -2\}$; $\{2, 1\}$.

Остальные примеры решить самостоятельно.

292. Определить оси линий второго порядка, заданных в предыдущей задаче.

Указание. Воспользоваться теоремой о том, что ось есть диаметр, соответствующий хордам главного, но не асимптотического направления.

293. Доказать теорему: для того чтобы вектор $\{p_1, p_2\}$ был вектором и главного и асимптотического направления относительно данной кривой второго порядка (1) (задача 279), необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0, a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0.$$

294. Каково условие того, что все направления являются главными относительно данной кривой второго порядка?

Указание. Воспользоваться соотношением (1) (задача 291).

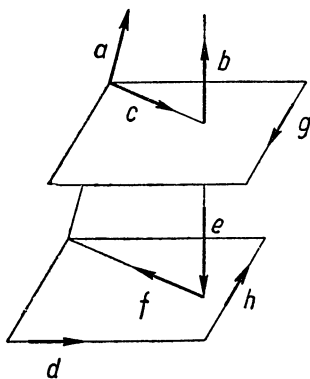
Глава IX

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

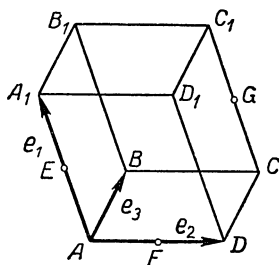
§ 27. Координаты векторов и их свойства

Литература: [1], часть II, § 2, 3; [2], глава VII, п. 141—144, 149, 150; [3], § 129—131.

295. На чертеже 40 изображены две параллельные плоскости и ряд векторов. Указать среди них коллинеарные и компланарные векторы.



Черт. 40.



Черт. 41

296. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, E, F, G — соответственно середины сторон AA_1, AD, CC_1 . Принимая векторы $\overline{AA_1}, \overline{AD}, \overline{AB}$ за координатные, определить координаты следующих векторов: $\overline{AC}, \overline{AE}, \overline{EC_1}, \overline{B_1C_1}, \overline{FG}, \overline{GD}, \overline{CB_1}, \overline{A_1G}$.

Решение. Координатами вектора в системе e_1, e_2, e_3 называются коэффициенты разложения его по координатным векторам e_1, e_2, e_3 . При этом известно, что коэффициенты разложения не зависят от способа разложения,

поэтому для решения задачи достаточно каким-либо способом данные векторы разложить по $\overline{e_1} = \overline{AA_1}$, $\overline{e_2} = \overline{AD}$, $\overline{e_3} = \overline{AB}$ (черт. 41); $\overline{AC} = \overline{e_2} + \overline{e_3}$, отсюда следует, что $\overline{AC} \{0, 1, 1\}$; $\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AA_1} = \frac{1}{2} \overline{e_1}$, отсюда следует, что $\overline{AE} \left\{ \frac{1}{2}, 0, 0 \right\}$; $\overline{EC_1} = \overline{EA_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} = \frac{1}{2} \overline{e_1} + \overline{e_3} + \overline{e_2}$; отсюда следует, что $\overline{EC_1} \left\{ \frac{1}{2}, 1, 1 \right\}$.

Аналогично можно получить координаты остальных векторов:

$$\overline{B_1C_1} \{0, 1, 0\}, \quad \overline{FG} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \quad \overline{GD} \left\{ -\frac{1}{2}, 0, -1 \right\},$$

$$\overline{CB_1} \{1, -1, 0\}, \quad \overline{A_1G} \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 1 \right\}.$$

Координаты вектора существенно зависят от выбора системы координат. Чтобы в этом убедиться, предлагаем:

297. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\overline{AD_1}$, \overline{AE} , \overline{AB} .

298. В тетраэдре $ABCS$ точки A' , B' , C' — соответственно середины ребер SA , SB и SC ; O и O' — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A'B'C'$. Принимая векторы $\overline{O'C'}$, $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'S}$ за координатные, определить координаты векторов \overline{CS} , \overline{AC} , $\overline{CA'}$, $\overline{O'A}$, \overline{AS} , $\overline{AC'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{AE'}$, где E' — середина отрезка $A'C'$.

299. Решить предыдущую задачу, полагая

$$\overline{e_1} = \overline{O'A'}, \quad \overline{e_2} = \overline{O'E'}, \quad \overline{e_3} = \overline{O'O}.$$

300. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (черт. 41) заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overline{AA_1} = \overline{e_1}$, $\overline{AD} = \overline{e_2}$, $\overline{AB} = \overline{e_3}$. Построить следующие векторы:

а) $\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$, б) $\overline{e_1} + \overline{e_2} + \frac{1}{2} \overline{e_3}$,

в) $\frac{1}{2} \overline{e_1} + \overline{e_2} - \overline{e_3}$, г) $-\overline{e_1} - \overline{e_2} + \frac{1}{2} \overline{e_3}$.

301. Найти линейную зависимость между векторами:

$$a \{1, 3, 0\}, b \{5, 10, 0\}, c \{4, -2, 6\}, d \left\{\frac{21}{2}, 17, 3\right\}.$$

Решение. Первый способ. Если $Oe_1e_2e_3$ система координат, то

$$\left. \begin{aligned} a &= e_1 + 3e_2, \\ b &= 5e_1 + 10e_2, \\ c &= 4e_1 - 2e_2 + 6e_3, \\ d &= \frac{21}{2}e_1 + 17e_2 + 3e_3. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для определения линейной зависимости между векторами сначала найдем максимальное число линейно независимых векторов. Векторы a , b и c не компланарны, так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-5) = -30 \neq 0.$$

Отсюда следует, что из первых трех соотношений (1) можно выразить e_1 , e_2 и e_3 через a , b и c . Из первых двух соотношений получаем:

$$e_1 = -2a + \frac{3}{5}b, \quad e_2 = a - \frac{1}{5}b.$$

Подставив эти значения в третье соотношение (1), получаем:

$$e_3 = \frac{1}{6}c - \frac{4}{6}e_1 + \frac{2}{6}e_2 = \frac{5}{3}a - \frac{7}{15}b + \frac{1}{6}c.$$

Из четвертого соотношения (1) получаем:

$$\begin{aligned} d &= a + \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}c, \\ 2a + 3b + c - 2d &= 0. \end{aligned}$$

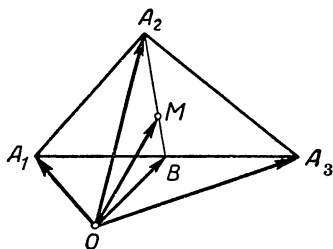
Второй способ. Четыре вектора a , b , c и d всегда линейно зависимы, поэтому существуют коэффициенты λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 , одновременно не равные нулю и удовлетворяющие условию:

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0.$$

Известно, что существует та же линейная зависимость между координатами этих векторов, поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{21}{2}\lambda_4 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 10\lambda_2 - 2\lambda_3 + 17\lambda_4 &= 0, \\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы получили систему однородных линейных уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 . Очевидно, $\lambda_4 \neq 0$. В самом деле, если $\lambda_4 = 0$, то из третьего соотношения следует, что $\lambda_3 = 0$, тогда из первого и второго соотношений (2) получаем: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Это противоречит условию линейной зависимости векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и \mathbf{d} . Таким образом, λ_4 можно положить равным любому числу, отличному от нуля. Пусть $\lambda_4 = 2$; тогда $\lambda_3 = -1$. Подставив эти значения в первое и второе соотношения (2), получаем $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -3$.



Черт. 42.

302. При обозначениях задачи 296 (черт. 41) найти линейную зависимость, существующую между векторами $\overline{AC_1}, \overline{A_1C}, \overline{DB_1}, \overline{DB}$.

303. Даны векторы $\mathbf{a} \{2, 3, -1\}, \mathbf{b} \{0, 1, 4\}, \mathbf{c} \{1, 0, -3\}$. Определить координаты следующих векторов:

а) $\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$; г) $\mathbf{p}_4 = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$;

б) $\mathbf{p}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} - 3\mathbf{c}$; д) $\mathbf{p}_5 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$;

в) $\mathbf{p}_3 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$; е) $\mathbf{p}_6 = \frac{\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$.

304. Показать, что векторы

$$\left\{ 3\frac{3}{5}, -3, 4\frac{1}{2} \right\} \text{ и } \left\{ -10, 8\frac{1}{3}, -12\frac{1}{2} \right\}$$

коллинеарны, а векторы

$$\{-3, 0, 2\}, \{2, 1, -4\}, \{11, -2, -2\}$$

компланарны.

305. Пусть M — точка пересечения медиан некоторого треугольника $A_1A_2A_3$, а O — произвольная точка пространства. Показать, что

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}}{3}.$$

Решение. Если B — середина стороны A_1A_3 , то $\overline{OM} = \overline{OA_2} + \frac{2}{3} \overline{A_2B}$ (см. черт. 42). Но

$$\overline{A_2B} = \overline{OB} - \overline{OA_2} = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_3}}{2} - \overline{OA_2}.$$

Таким образом,

$$\overline{OM} = \overline{OA_2} + \frac{2}{3} \left(\frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_3}}{2} - \overline{OA_2} \right) = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}}{3}.$$

Пользуясь этой формулой, решите следующую задачу:

306. Пусть треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют произвольные расположения в пространстве. Показать, что

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = 3\overline{M_1M_2},$$

где M_1 и M_2 — точки пересечения медиан данных треугольников.

§ 28. Координаты точек; решение простейших задач в координатах

Литература: [1], часть II, § 1; [2], глава VII, п. 145—148, 151, 152, 154; [3], § 122—127.

307. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ даны координаты четырех вершин $A(2, -1, 1)$, $B(1, 3, 4)$, $A_1(4, 2, 0)$, $D(6, 0, 1)$. Найти координаты остальных вершин.

Решение. Идея решения задачи заключается в следующем. Если $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4}$ и известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, то легко найти координаты точки $M_4(x_4, y_4, z_4)$. В самом деле, $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, отсюда $x_4 = (x_2 - x_1) + x_3$. Аналогично можно получить: $y_4 = (y_2 - y_1) + y_3$, $z_4 = (z_2 - z_1) + z_3$.

а) Определим координаты точки D_1 . Так как $\overline{AD} = \overline{A_1D_1}$, то $6 - 2 = x - 4$, $0 + 1 = y - 2$, $1 - 1 = z - 0$ или $x = 8$, $y = 3$, $z = 0$. Таким образом, $D_1(8, 3, 0)$.

б) Определим координаты точки C_1 . Так как $\overline{AB} = \overline{D_1C_1}$, то $1 - 2 = x - 8$, $3 + 1 = y - 3$, $4 - 1 = z - 0$ или $x = 7$, $y = 7$, $z = 3$. Таким образом, $C_1(7, 7, 3)$.

Используя соответствующие соотношения, покажите, что $B_1(3, 6, 3)$, $C(5, 4, 4)$.

308. Вершины четырехугольника находятся в точках $A(1, -3, -2)$, $B(8, 0, -4)$, $C(4, 8, -3)$, $D(-3, 5, -1)$. Показать, что $ABCD$ —параллелограмм.

309. Даны три вершины параллелограмма $A(2, 5, 4)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(4, 1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D .

310. Дана точка $M(2, -1, 1)$ в прямоугольной декартовой системе координат. Определить координаты точки M' , симметричной с точкой M

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей Oxy , Oyz , Oxz ;

в) относительно координатных осей Ox , Oy , Oz .

Решение. а) Если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно начала координат, то

$$\frac{x+x'}{2} = 0, \quad \frac{y+y'}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{z+z'}{2} = 0,$$

отсюда $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Для данной точки M получаем: $M'(-2, 1, -1)$.

б) Если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно координатной плоскости Oxy , то вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору \mathbf{k} и середина отрезка MM' лежит в плоскости Oxy . Следовательно, $x' - x = 0$, $y' - y = 0$ (условие коллинеарности: $\overline{MM'} \parallel \mathbf{k}$); $\frac{z+z'}{2} = 0$ (середина отрезка MM' лежит в плоскости Oxy). Таким образом, $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$. Для данной точки получаем: $M'(2, -1, -1)$.

Если N и P — точки, симметричные точке M относительно плоскостей Oxz и Oyz , то аналогично предыдущему получаем: $N(2, 1, 1)$, $P(-2, -1, 1)$.

в) Если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно оси Ox , то вектор $\overline{MM'}$ параллелен плоскости Oyz , т. е. компланарен с векторами \mathbf{j} , \mathbf{k} , и середина отрезка MM' лежит на оси Ox . Следовательно, $x - x' = 0$

(условие компланарности векторов $\overline{MM'}$, \mathbf{j} и \mathbf{k}), $\frac{y+y'}{2} = 0$, $\frac{z+z'}{2} = 0$ (середина отрезка MM' лежит на оси Ox). Та-

ким образом, $x' = x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Для данной точки получаем: $M'(2, 1, -1)$.

Если R и S — точки, симметричные точке M относительно осей Oy и Oz , то аналогично предыдущему получаем: $R(-2, -1, -1)$, $S(-2, 1, 1)$.

311. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты вершин треугольника ABC : $A(2, 3, -1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(1, 1, 1)$. Определить координаты вершин треугольника, симметричного треугольнику ABC

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей Oxy , Oxz и Oyz ;

в) относительно координатных осей Ox , Oy и Oz .

312. Показать, что точки

$A(3, 2, 1)$, $B(5, 3, -2)$, $C(1, 1, 4)$

лежат на одной прямой, а точки

$D(0, 0, -1)$, $E\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $F(0, 1, 2)$, $G(1, 1, 1)$

— в одной плоскости.

У к а з а н и е. Показать, что векторы \overline{AB} , \overline{AC} коллинеарны, а векторы \overline{DE} , \overline{DF} , \overline{DG} — компланарны.

313. В прямоугольной декартовой системе координат найти расстояние между точками: $A_1(1, 2, 3)$ и $A_2(1, -2, 0)$; $B_1(2, -3, 1)$ и $B_2(1, -3, 8)$; $C_1(-1, -1, 0)$ и $C_2(2, 3, \sqrt{5})$.

Найти расстояние от начала координат до точек $M(1, -3, \sqrt{15})$, $N(0, 2, 3)$, $P(3, \sqrt{7}, -3)$, $Q(1, -5, 6)$.

314. Определить радиус сферы, проходящей через точку $(-2, 0, 2)$ и имеющей центр в точке $(1, 1, 6)$. Система координат прямоугольная декартова.

315. В прямоугольной декартовой системе координат даны вершины треугольника: $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -6)$, $C(-5, 0, 2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .

316. В прямоугольной декартовой системе даны четыре точки: $M_1(0, 1, -1)$, $M_2(1, 0, 1)$, $M_3(-1, 1, 0)$, $M_4(1, -1, 1)$. Найти точку, одинаково удаленную от каждой из данных точек.

317. Найти координаты центра и радиус сферы, которая проходит через точки $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$. Система координат прямоугольная декартова.

318. На прямой l взяты последовательно точки $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ так, что $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Зная координаты точек $A_3(1, -1, 2)$ и $A_5(2, 1, -4)$, определить координаты остальных точек.

319. На прямой, проходящей через точки $A(1, 0, 4)$ и $B(3, -1, 2)$, найти точку C так, чтобы $AC = 3AB$ и B лежала между A и C .

320. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB : $A(2, -1, 7)$ и $B(4, 5, -2)$.

Решение. Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 отношения, в которых каждая из координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy делит отрезок AB .

Если обозначить через P_1, P_2 и P_3 точки пересечения прямой AB с плоскостями Oyz, Oxz и Oxy , то

$$P_1\left(\frac{2 + \lambda_1 4}{1 + \lambda_1}, \frac{-1 + \lambda_1 5}{1 + \lambda_1}, \frac{7 - \lambda_1 2}{1 + \lambda_1}\right),$$

$$P_2\left(\frac{2 + \lambda_2 4}{1 + \lambda_2}, \frac{-1 + \lambda_2 5}{1 + \lambda_2}, \frac{7 - \lambda_2 2}{1 + \lambda_2}\right),$$

$$P_3\left(\frac{2 + \lambda_3 4}{1 + \lambda_3}, \frac{-1 + \lambda_3 5}{1 + \lambda_3}, \frac{7 - \lambda_3 2}{1 + \lambda_3}\right).$$

Так как P_1 лежит в плоскости Oyz , то $\frac{2 + \lambda_1 4}{1 + \lambda_1} = 0$,
отсюда $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$.

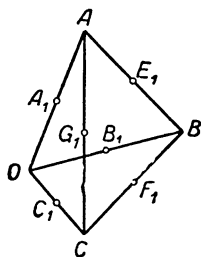
Точно так же получаем: $\lambda_2 = \frac{1}{5}$ и $\lambda_3 = \frac{7}{2}$.

321. Показать, что в аффинной системе координат координаты центра тяжести треугольника равны средним арифметическим соответствующих координат вершин.

§ 29. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии

322. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам,

Решение. Пусть $OABC$ —данный тетраэдр, а A_1, B_1, C_1, G_1, F_1 и E_1 —соответственно середины ребер OA, OB, OC, CA, CB, AB (черт. 43). Принимая вершину O за начало координат и полагая $\overline{OA_1} = a$,



Черт. 43.

$\overline{OB_1} = b$ и $\overline{OC_1} = c$, выразим радиусы-векторы середин отрезков A_1F_1, B_1G_1 и C_1E_1 через a, b и c и убедимся в том, что они совпадают. Если обозначить через R, S и T середины отрезков A_1F_1, B_1G_1 и C_1E_1 , то

$$r_R = \frac{\overline{OA_1} + \overline{OF_1}}{2} = \frac{a + \frac{2b + 2c}{2}}{2} = \frac{a + b + c}{2},$$

$$r_S = \frac{\overline{OB_1} + \overline{OG_1}}{2} = \frac{b + \frac{2a + 2c}{2}}{2} = \frac{a + b + c}{2},$$

$$r_T = \frac{\overline{OC_1} + \overline{OE_1}}{2} = \frac{c + \frac{2a + 2b}{2}}{2} = \frac{a + b + c}{2}.$$

Пользуясь этим методом, самостоятельно решите следующие три задачи.

323. Если в неплоском шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны попарно параллельны, то диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

324. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие каждую вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке G и каждый из отрезков делится этой точкой в отношении $\lambda = 3$ (считая от вершины тетраэдра).

325. В неплоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: а) середины двух противоположных сторон; б) середины двух других противоположных сторон; в) середины диагоналей.

Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке и каждый из них делится в этой точке пополам¹.

¹ Сравнить с задачей 322.

326. Доказать, что во всяком неплоском четырехугольнике прямые, соединяющие середины смежных сторон, образуют параллелограмм.

Решение. Пусть $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ и $A_4(x_4, y_4, z_4)$ — вершины данного неплоского четырехугольника в некоторой аффинной системе координат. Если P_{12} , P_{23} , P_{34} и P_{41} — середины соответствующих сторон, то очевидно,

$$P_{12} \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right), P_{23} \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2} \right),$$

$$P_{34} \left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2} \right), P_{41} \left(\frac{x_4+x_1}{2}, \frac{y_4+y_1}{2}, \frac{z_4+z_1}{2} \right).$$

Найдем координаты векторов $\overline{P_{12}P_{23}}$ и $\overline{P_{41}P_{34}}$:

$$\overline{P_{12}P_{23}} \left\{ \frac{x_3-x_1}{2}, \frac{y_3-y_1}{2}, \frac{z_3-z_1}{2} \right\},$$

$$\overline{P_{41}P_{34}} \left\{ \frac{x_3-x_1}{2}, \frac{y_3-y_1}{2}, \frac{z_3-z_1}{2} \right\}.$$

Таким образом, $\overline{P_{12}P_{23}} = \overline{P_{41}P_{34}}$. Так как точка A_4 не лежит в плоскости $A_1A_2A_3$, то середина отрезка A_3A_4 — точка P_{34} — также не лежит в этой плоскости. Но точки P_{12} и P_{34} лежат в плоскости $A_1A_2A_3$, поэтому P_{12} , P_{23} и P_{34} не лежат на одной прямой и $P_{12}P_{23}P_{34}P_{41}$ — параллелограмм.

Глава X

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§ 30. Скалярное произведение векторов

Л и т е р а т у р а: [1], часть II, § 4; [2], глава III, п. 47—53; глава VIII, п. 166—169, 171, 172, 173, 175—176; [3], § 24—26, 133.

327. Даны координаты векторов a , b и c в прямоугольной декартовой системе координат: $a \{4, -2, -4\}$, $b \{2, 4, 3\}$, $c \{0, 1, -1\}$. Вычислить:

а) ab ; б) ac ; в) $\sqrt{a^2}$; г) $(a - b)(a + c)$; д) $(a - b)^2$.

328. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе:

$A(-4, -4, 4)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(2, 5, 1)$, $D(3, -2, 2)$, взаимно перпендикулярны.

329. Определить косинус угла между векторами:

а) $a_1 \{2, -1, 3\}$ и $b_1 \{1, -4, 3\}$;

б) $a_2 \{2, -2, 1\}$ и $b_2 \{3, 0, -4\}$;

в) $a_3 \{0, -1, 5\}$ и $b_3 \{7, 5, 1\}$.

330. В прямоугольной декартовой системе координат даны вершины треугольника: $A(2, 1, \sqrt{2})$, $B(1, 0, 0)$ и $C(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$. Найти углы треугольника.

331. Показать, что четырехугольник $A(4, 0, 8)$ $B(5, 2, 6)$, $C(3, 1, 4)$, $D(2, -1, 6)$, заданный в прямоугольной декартовой системе координат, есть квадрат.

Решение. Для того чтобы решить задачу, достаточно показать, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $AB = AD$ и $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

Определим координаты векторов \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{DC} :

$$\overline{AB} \{1, 2, -2\}, \quad \overline{AD} \{-2, -1, -2\}, \quad \overline{DC} \{1, 2, -2\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

Далее, $AB = \sqrt{1+4+4} = 3$, $AD = \sqrt{4+1+4} = 3$.

332. Какой угол составляют между собой ненулевые векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} , если известно, что вектор $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ перпендикулярен к вектору $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, а вектор $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ перпендикулярен к вектору $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$?

Решение. Так как пары векторов $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$, $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, то

$$(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{a} - 4\mathbf{b})(7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 0.$$

Отсюда, пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем:

$$7a^2 + 16ab - 15b^2 = 0, \quad 7a^2 - 30ab + 8b^2 = 0,$$

или

$$7a^2 + 16ab \cos \varphi - 15b^2 = 0, \quad 7a^2 - 30ab \cos \varphi + 8b^2 = 0,$$

где $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$.

Разделив эти соотношения на a^2 и введя обозначение $\lambda = \frac{b}{a}$, получим:

$$7 + 16\lambda \cos \varphi - 15\lambda^2 = 0, \quad 7 - 30\lambda \cos \varphi + 8\lambda^2 = 0.$$

Исключив из этих двух соотношений λ , получим одно уравнение для определения $\cos \varphi$. Вычитая из первого соотношения второе, получаем:

$$46\lambda \cos \varphi - 23\lambda^2 = 0, \quad \text{или} \quad 2 \cos \varphi = \lambda.$$

Подставив это значение в одно из предыдущих уравнений, получим: $7 + 32 \cos^2 \varphi - 60 \cos^2 \varphi = 0$ или $\cos^2 \varphi = \frac{1}{4}$;

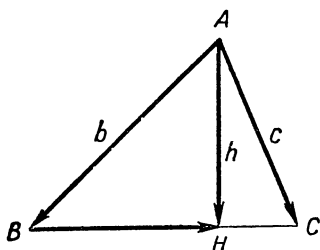
$$\cos \varphi = \pm \frac{1}{2}, \quad \varphi_1 = 60^\circ, \quad \varphi_2 = 120^\circ.$$

333. Треугольник ABC задан векторами $\overline{AB} = \mathbf{b}$ и $\overline{AC} = \mathbf{c}$. Выразить через векторы \mathbf{b} и \mathbf{c} вектор \mathbf{h} , направленный по высоте \overline{AH} .

Решение. Вектор \overline{BH} коллинеарен с вектором \overline{BC} (черт. 44), поэтому

$$\overline{BH} = \lambda \overline{BC} = \lambda (c - b),$$

$$h = \overline{AB} + \overline{BH} = b + \lambda (c - b). \quad (1)$$



Черт. 44.

Так как векторы h и \overline{BC} перпендикулярны, то $h \cdot \overline{BC} = 0$, или

$$[b + \lambda (c - b)] (c - b) = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{(b - c) b}{(c - b)^2}.$$

Подставляя найденное значение λ в выражение (1), получим:

$$h = b + \frac{(b - c) b}{(c - b)^2} (c - b).$$

334. Даны координаты вершин треугольника: $A(1, 1, 1)$, $B(5, 3, 0)$, $C(2, 0, 1)$. Определить координаты и длину вектора \overline{BH} , где H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на противоположную сторону.

335. Даны три некопланарных вектора $\overline{OA} \{1, -1, -2\}$, $\overline{OB} \{1, 0, -1\}$ и $\overline{OC} \{2, 2, -1\}$.

Найти координаты вектора \overline{OH} , где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC .

336. В прямоугольной декартовой системе даны векторы $a \{2, -1, 3\}$, $b \{1, -3, 2\}$, $c \{3, 2, -4\}$. Определить координаты вектора x , удовлетворяющего условиям:

$$xa = 10, \quad xb = 22, \quad xc = -40.$$

337. Доказать теорему: для того чтобы сумма двух неколлинеарных векторов a и b была направлена вдоль биссектрисы угла, образованного этими векторами, необходимо и достаточно, чтобы $|a| = |b|$.

Доказательство. Пусть вектор $p = a + b$ направлен вдоль биссектрисы угла (a, b) ; тогда

$$\Rightarrow (a, a + b) = \Rightarrow (a + b, b)$$

или

$$\cos [a(a+b)] = \cos [(a+b), b],$$

откуда

$$\frac{a(a+b)}{|a||a+b|} = \frac{(a+b) \cdot b}{|b||a+b|};$$

$$|b|a(a+b) = |a|(a+b)b, \quad |b|(a^2+ab) = |a|(ab+b^2);$$

$$|b||a|^2 - |a||b|^2 = ab(|a| - |b|);$$

$$|a||b|(|a| - |b|) = (ab)(|a| - |b|).$$

Окончательно получаем:

$$(|a| - |b|) \cdot [(ab) - |a||b|] = 0.$$

Так как векторы a и b не коллинеарны, то $ab - |a||b| \neq 0$ поэтому из предыдущего соотношения получаем $|a| = |b|$.

Докажем обратное предложение. Пусть $|a| = |b| = \alpha$ $\rightarrow \angle(a, a+b) = \varphi_1$ и $\angle(b, a+b) = \varphi_2$. Докажем, что $\varphi_1 = \varphi_2$.

Пользуясь распределительным свойством скалярного произведения, получаем: $a(a+b) = a^2 + ab = \alpha^2 + ab$ и $b(a+b) = ba + b^2 = ba + \alpha^2$. Таким образом,

$$a(a+b) = b(a+b), \quad |a||a+b| \cos \varphi_1 = |b||a+b| \cos \varphi_2$$

или $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$. Так как $\varphi_1 < \pi$ и $\varphi_2 < \pi$, то $\varphi_1 = \varphi_2$.

Используя результат этой задачи, решить следующие две задачи.

338. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла A треугольника ABC с вершинами в точках $A(1, 3, 5)$, $B(3, 5, 6)$ и $C(4, 7, 5)$.

339. Найти угол между двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла.

340. Пусть $OABC$ — прямой трехгранный угол, OM — луч исходящий из вершины этого угла, а α, β, γ — углы, которые образует луч OM с лучами OA, OB и OC . Показать, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Решение. Пусть i, j, k и p — единичные векторы, направленные вдоль лучей OA, OB, OC и OM . Разложим вектор p по векторам i, j, k :

$$p = ai + bj + ck. \quad (1)$$

Так как $|p| = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \quad (2)$$

С другой стороны, умножив скалярно соотношение (1) последовательно на i , j и k , получаем:

$$pi = a, \quad pj = b, \quad pk = c.$$

Таким образом, $a = pi = |p||i| \cos \alpha = \cos \alpha$. Точно так же получаем: $b = \cos \beta$, $c = \cos \gamma$.

Подставив эти выражения в соотношение (2), получаем искомый результат.

341. Диагональ AE прямоугольного параллелепипеда образует с каждым из двух ребер, выходящих из точки A , угол 60° . Какой угол она образует с третьим ребром, выходящим из той же точки A ?

342. Определить проекцию вектора $p = 5i + j$ на ось, имеющую направление вектора $q = 5i - 12j$.

Решение. Проекция вектора p на ось, имеющую направление вектора q , определяется формулой:

$$\text{Пр}_q p = |p| \cos \varphi = \frac{pq}{|q|}.$$

Для данных векторов:

$$\text{Пр}_q p = \frac{25 - 12}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{13}{13} = 1.$$

343. Найти проекцию вектора $i - 2j + 2k$ на ось, образующую равные острые углы с тремя координатными осями.

344. Дан параллелограмм $OABC$. $\overline{OA} = \overline{CB} = a$, $\overline{OC} = \overline{AB} = b$. Дать геометрическое истолкование формул:

а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

б) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

в) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

§ 31. Векторное и смешанное произведения векторов

Литература: [1], часть II, § 5 и 6; [2], гл. VIII, п. 155 — 163, 177 — 182; [3], § 134 — 136.

345. Определить координаты векторов:

- а) $a \times b$; б) $a \times c$; в) $b \times d$;
г) $d \times a$; д) $a \times d$; е) $b \times c$,

если векторы a, b, c и d даны своими координатами в прямоугольной декартовой правой системе:

$$a \{0, 1, 0\}, \quad b \{2, -1, 3\}, \quad c \{0, 5, -2\}, \quad d \{1, 2, -3\}.$$

346. Определить координаты векторов: а) $a \times (b \times c)$, б) $(a \times b) \times c$, если векторы a, b и c даны своими координатами в прямоугольной декартовой правой системе:

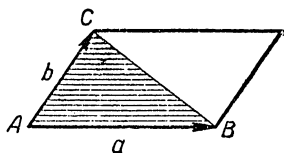
$$a \{1, 1, 0\}, \quad b \{0, 3, 1\}, \quad c \{2, 0, 1\}.$$

347. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев:

- а) $A(2, 1, 0), \quad B(-3, -6, 4), \quad C(-2, 4, 1);$
б) $A(4, 2, 3), \quad B(5, 7, 0), \quad C(2, 8, -1);$
в) $A(6, 5, -1), \quad B(12, 1, 0), \quad C(1, 4, -5).$

Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Как известно, если векторы a и b приложены к некоторой точке A , то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах a и b (черт. 45), равна $|a \times b|$. Отсюда следует, что площадь треугольника ABC , изображенного на чертеже 45, равна $\frac{|a \times b|}{2}$.



Черт. 45.

Пользуясь этим замечанием, легко решить предложенные примеры. В самом деле, пусть даны координаты вершин треугольника в прямоугольной декартовой системе:

Тогда $A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3).$

$$\overline{AB} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\overline{AC} \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\};$$

поэтому векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{AC}$ имеет координаты:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} \left\{ \varepsilon \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \right. \\ \left. \varepsilon \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}, \varepsilon \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Здесь $\varepsilon = +1$, если система координат правая, и $\varepsilon = -1$, если она левая.

Площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Подставив сюда значения координат точек, получаем площади данных треугольников:

$$\text{а) } \sigma = \frac{\sqrt{2331}}{2}; \quad \text{б) } \sigma = 3\sqrt{10}; \quad \text{в) } \sigma = \frac{\sqrt{1326}}{2}.$$

348. Используя векторное произведение, вывести формулу для вычисления площади треугольника, заданного координатами своих вершин в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости.

Указание. Воспользоваться формулой предыдущей задачи.

349. Моментом приложенной к точке A силы \mathbf{f} относительно точки B называется вектор $\mathbf{p} = \overline{BA} \times \mathbf{f}$. Определить момент силы \mathbf{f} в каждом из следующих случаев:

- а) $\mathbf{f} \{2, -4, 3\}$, $A(1, 5, 0)$, $B(0, 0, 0)$;
 б) $\mathbf{f} \{2, -4, 3\}$, $A(1, 5, 0)$, $B(5, -3, 6)$;
 в) $\mathbf{f} \{3, 0, 1\}$, $A(5, 2, 6)$, $B(4, 5, 2)$.

350. Показать, что:

а) момент силы относительно точки не меняется, если точку приложения силы переместить по прямой, вдоль которой сила действует;

б) момент равнодействующей нескольких сил, приложен-

ных к одной и той же точке, равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

351. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (см. чертеж 41), репер $\overline{AA_1}$, \overline{AB} и \overline{AD} имеет левую ориентацию. Определить ориентации реперов:

а) \overline{DA} , \overline{DC} , $\overline{DD_1}$; б) $\overline{C_1C}$, $\overline{C_1D_1}$, $\overline{C_1B_1}$;

в) $\overline{D_1A_1}$, $\overline{D_1D}$, $\overline{D_1B_1}$; г) \overline{BA} , $\overline{BB_1}$, \overline{BC} ; д) \overline{FB} , \overline{FD} , $\overline{FA_1}$,

где F — середина ребра AD .

352. К каждой грани треугольной призмы восстановлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону призмы и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нулю.

Указание. Если $ABCA'B'C'$ — данная призма, то построенные векторы можно выразить при помощи векторного произведения через \overline{AB} , \overline{AC} и $\overline{AA'}$.

353. К каждой грани произвольного тетраэдра восстановлен перпендикулярный вектор, направленный во внешнюю сторону тетраэдра и имеющий модуль, равный площади соответствующей грани. Доказать, что сумма всех построенных векторов равна нулю. (См. указание к предыдущей задаче.)

354. Пусть

$$a = 2i - 3j + k, \quad b = i + j + 2k, \quad c = 3i + j - k.$$

Вычислить произведения: а) abc , б) $b(a \times c)$.

355. Вычислить произведения:

$$\alpha = a(b + c)(a + b + c), \quad \beta = b(c + a)(b + 2c), \quad \text{если } abc = 5.$$

Решение. Пользуясь свойствами тройного произведения, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha &= a(b + c)[a + (b + c)] = \\ &= a(b + c)a + a(b + c)(b + c) = 0, \end{aligned}$$

так как в каждом из слагаемых векторы компланарны;

$$\begin{aligned} \beta &= b(c + a)(b + 2c) = b(c + a)b + b(c + a)(2c) = \\ &= b(c + a)(2c) = bc(2c) + ba(2c) = 2(bac) = \\ &= -2(abc) = -10. \end{aligned}$$

356. Пусть a, b, c — произвольные векторы, а α, β, γ — произвольные числа. Доказать, что векторы $\alpha a - \beta b, \gamma b - \alpha c, \beta c - \gamma a$ компланарны.

357. Пусть a, b, c и d — произвольные векторы. Проверить тождества:

- а) $(a \times b)^2 + (ab)^2 = a^2 b^2$;
- б) $(a + b) \times (a - b) = -2(a \times b)$;
- в) $(a \times b) \times c = b(ac) - a(bc)$;
- г) $(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc)$;
- д) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$.

Пользуясь первым из этих соотношений, доказать тождество Лагранжа:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{matrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z_1 x_1 \\ z_2 x_2 \end{matrix} \right|^2 = \\ & = \left| \begin{matrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{matrix} \right|. \end{aligned}$$

358. Доказать, что если i, j и k — взаимно перпендикулярные единичные векторы, то для любых векторов a и b справедливо соотношение.

$$a \times b = (abi)i + (abj)j + (abk)k.$$

Решение. Разложим вектор $a \times b$ по реперу i, j, k :

$$a \times b = \alpha i + \beta j + \gamma k \quad (1)$$

и определим коэффициенты разложения.

Для определения коэффициента α умножим (1) скалярно на i : $(a \times b)i = \alpha(ii)$, или $(abi) = \alpha$. Аналогично получаем: $(abj) = \beta$ и $(abk) = \gamma$. Подставив полученные значения в соотношение (1), получаем искомое тождество.

359. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках:

- а) $A(2, -1, -1), B(5, -1, 2), C(3, 0, -3), D(6, 0, -1)$;
- б) $A(0, 0, 0), B(3, 4, -1), C(2, 3, 5), D(6, 0, -3)$.

Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Как известно, если векторы a , b и c приложены к точке A , то объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен $|abc|$. Отсюда следует, что объем V тетраэдра $ABCD$ определяется соотношением:

$$V = \left| \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}}{6} \right|.$$

Пользуясь этой формулой, покажите, что в случае а)

$V_1 = 0,5$ куб. ед., а в случае б) $V_2 = 22,5$ куб. ед.

360. Найти длину высоты AH тетраэдра $ABCD$, вершины которого находятся в точках:

$$\begin{aligned} A(2, -4, 5), \quad B(-1, -3, 4), \\ C(5, 5, -1), \quad D(1, -2, 2). \end{aligned}$$

Система координат прямоугольная декартова.

361. Дан параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB} \{4, 3, 0\}$, $\overline{AD} \{2, 1, 2\}$ и $\overline{AA'} \{-3, -2, 5\}$. Найти: а) объем параллелепипеда; б) площади граней; в) длину высоты, проведенной из вершины A' на грань $ABCD$; г) косинус угла φ_1 между ребром AB и диагональю $B'D$; д) косинус угла φ_2 между гранями $ABCD$ и $ADD'A'$.

Система координат прямоугольная декартова.

362. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overline{AB} \{0, 1, -1\}$ и $\overline{AC} \{2, -1, 4\}$ определяют основание, а вектор $\overline{AA'} \{-3, 2, 2\}$ направлен по боковому ребру. Найти: а) объем призмы; б) площади граней; в) высоту; г) угол φ между ребрами $B'C'$ и AA' .

Система координат прямоугольная декартова.

363. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overline{AB} \{2, 0, 0\}$, $\overline{AC} \{3, 4, 0\}$ и $\overline{AD} \{3, 4, 2\}$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты h , проведенной из вершины D ; г) косинус угла φ_1 между ребрами AB и BC ; д) косинус угла φ_2 между гранями ABC и ADC .

Система координат прямоугольная декартова.

364. Дан треугольник координатами своих вершин: $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 1, 0)$, $C(2, 6, -2)$. Найти: а) площадь треугольника; б) косинусы внутренних углов; в) длину высоты BH и координаты вектора \overline{BH} ; г) вектор a , коллинеарный биссектрисе угла A ; д) координаты центра тяжести треугольника.

Система координат прямоугольная декартова.

365. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(2, -3, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(-4, 5, 6)$, $D(2, -3, 6)$. Доказать, что $ABCD$ — плоский выпуклый четырехугольник. Найти: а) площадь четырехугольника; б) косинусы его углов; в) вектор a , коллинеарный биссектрисе угла A ; г) вектор \overline{BH} , где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC ; д) координаты центра тяжести четырехугольника.

Система координат прямоугольная декартова.

366. Даны векторы $\overline{AB} \{3, -1, 2\}$, $\overline{AC} \{5, 1, 0\}$. Определить площадь треугольника ABC . Определить координаты какого-либо вектора h , компланарного с векторами \overline{AB} и \overline{AC} и перпендикулярного к вектору $m = \overline{AB} - \overline{AC}$.

§ 32. Свойства произведений векторов, отличные от свойств произведения чисел

367. Если a и b — числа, то $ab = ba$. Будет ли справедливо это свойство: а) для скалярного произведения векторов; б) для векторного произведения векторов?

368. Если a и b — числа, то из равенства $ab = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел a и b равно нулю. Будет ли справедливо это свойство а) для скалярного произведения векторов; б) для векторного произведения векторов?

369. Пусть a — ненулевой вектор, а α — произвольное число. Найти вектор x , удовлетворяющий уравнению: $ax = \alpha$.

Сколько решений имеет это уравнение? Выяснить геометрический смысл решений.

Решение. Пусть

$$ax = \alpha \quad (1)$$

— данное уравнение.

Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oijk$ так, чтобы вектор i был сонаправлен с вектором a . Приложим искомый вектор x к точке O и обозначим через x, y, z прямоугольные декартовы координаты конца M этого вектора. В этом случае $a = |a|i$, $x = xi + yi + zk$, поэтому уравнение (1) равносильно соотношению

$$|a|x = \alpha. \quad (2)$$

Если \overline{OM} — решение уравнения (1), то первая координата $M(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению (2). Обратно, если первая координата некоторой точки M удовлетворяет уравнению (2), то вектор \overline{OM} , очевидно, является решением уравнения (1). Таким образом, уравнение (2) является уравнением геометрического места концов всех решений векторного уравнения (1), если начала их приложены к точке O .

Уравнением (2) задается плоскость π , перпендикулярная к вектору a (черт. 46). При $\alpha = 0$ плоскость π проходит через точку O и, следовательно, уравнению (1) удовлетворяют те и только те векторы, которые перпендикулярны к a .

Приведенное исследование показывает, что свойства скалярного произведения существенно отличаются от свойств произведения чисел. В самом деле, если a и b — числа, то уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. В векторной алгебре аналогичное уравнение (1), как было показано, имеет бесчисленное множество решений.

370. Пусть a — ненулевой вектор, а α — произвольное число. Решить и исследовать уравнение:

$$x^2 + 2ax + \alpha = 0. \quad (1)$$

Решение. Ход решения задачи аналогичен предыдущему. Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oijk$ так, чтобы вектор i был сонаправлен с вектором a . Приложим искомый вектор x к точке O и обозначим через x, y, z прямоугольные декартовы координаты конца M этого вектора. В этом случае

$$x^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad ax = |a|x,$$

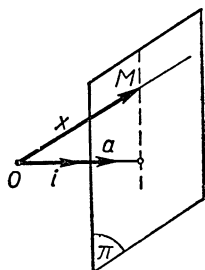
поэтому уравнение (1) эквивалентно уравнению:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2|a|x + \alpha = 0,$$

или

$$(x + |a|)^2 + y^2 + z^2 = |a|^2 - \alpha.$$

Мы получили уравнение геометрического места концов искомых векторов, если начала приложены к точке O .



Черт. 46.

Исследуем это уравнение.

а) $|\mathbf{a}|^2 - \alpha > 0$. Геометрическое место концов векторов, приложенных в начале координат, удовлетворяющих уравнению (1), есть сфера с центром в точке $(-|\mathbf{a}|, 0, 0)$ и радиуса $R = \sqrt{\alpha^2 - \alpha}$.

б) $|\mathbf{a}|^2 - \alpha < 0$. Действительных решений нет. Все векторы мнимые.

в) $|\mathbf{a}|^2 - \alpha = 0$. Уравнение (1) имеет одно решение: вектор, начало которого в начале координат, а конец в точке $(-|\mathbf{a}|, 0, 0)$.

371. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — произвольные векторы. Всегда ли имеет решение уравнение $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$? В случае, когда уравнение имеет решение, выяснить геометрический смысл.

372. Найти вектор \mathbf{x} из системы уравнений:

$$\mathbf{x}\mathbf{a} = \alpha, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{при } \mathbf{b} \neq 0.$$

Написать условия разрешимости этой системы.

Решение. Второе уравнение разрешимо только в том случае, когда $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \neq 0$ (см. предыдущую задачу).

Возьмем вспомогательный единичный вектор \mathbf{c} , перпендикулярный к плоскости векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} так, чтобы $\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} > 0$. Разложим искомый вектор \mathbf{x} по реперу: \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , векторы которого взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a} + x_2\mathbf{b} + x_3\mathbf{c}. \quad (1)$$

Подставив это значение в данные уравнения, получаем:

$$x_1(\mathbf{a}\mathbf{a}) = \alpha; \quad x_2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + x_3(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b}.$$

Отсюда получаем:

$$x_1 = \frac{\alpha}{a^2}.$$

Умножив второе уравнение скалярно на \mathbf{c} , получаем:

$$x_2(\mathbf{b}\mathbf{a}\mathbf{c}) + x_3(\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c}) = \mathbf{b}\mathbf{c},$$

отсюда $x_2 = 0$. Для определения x_3 умножим второе соотношение (2) скалярно на \mathbf{b} : $x_3(\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{b}^2$; так как $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, то

$$x_3 = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}.$$

Учитывая, что

$$c = \frac{a \times b}{|a \times b|} = \frac{a \times b}{|a| |b|},$$

из (1) окончательно получаем:

$$x = \frac{a}{a^2} a + \frac{a \times b}{|a|^2} = \frac{aa + a \times b}{a^2}. \quad (3)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что вектор x , определяемый соотношением (3), является решением исходной системы.

Таким образом, при $a \perp b$ и $a \neq 0$ система имеет единственное решение (3). Если хотя бы одно из условий $a \perp b$ или $a \neq 0$ не выполняется, то система не имеет решений.

373. Найти вектор x , удовлетворяющий условию $abx = a$, где a и b — данные векторы, а a — данное число. Всегда ли уравнение имеет решение? Выяснить геометрический смысл.

374. Пусть $a \times c = b \times c$ при $c \neq 0$. Можно ли сократить это соотношение на c , т. е. следует ли из предыдущего соотношения, что $a = b$?

375. Пусть $a \times p = b \times p$, для любого вектора p . Следует ли отсюда, что $a = b$?

376. Пусть $ac = bc$, при $c \neq 0$. Можно ли сократить это соотношение на c ?

377. Если α , β и γ — произвольные числа, то $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Имеется ли аналогичное свойство в векторной алгебре, т. е. справедливы ли соотношения $(ab)c = a(bc)$ и $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ для любых векторов a , b и c ?

378. Если k — натуральное число, а α — некоторое число, то, как известно, понятие натуральной степени числа α вводится так: $\alpha^k = \underbrace{\alpha\alpha \dots \alpha}_{k \text{ раз}}$. Почему при $k > 2$ не вводится аналогичное понятие в векторной алгебре?

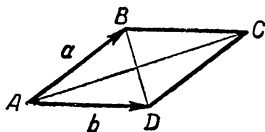
§ 33. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии

379. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

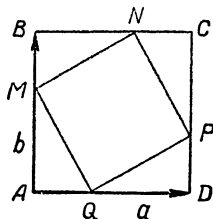
Решение. Скалярное произведение векторов с успехом может быть применено к решению задач элементар-

ной геометрии во всех тех случаях, когда требуется доказать, что какие-либо два из данных отрезков взаимно перпендикулярны. В самом деле, ненулевые отрезки M_1M_2 и M_3M_4 взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_3M_4} = 0$.

Пусть $ABCD$ — данный ромб с диагоналями AC и BD (черт. 47). Полагая $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AD} = \mathbf{b}$, выразим векторы \overline{AC} и \overline{BD} через \mathbf{a} и \mathbf{b} :



Черт. 47.



Черт. 48.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Отсюда получаем:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2,$$

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = AB^2, \quad \mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}|^2 = AD^2.$$

Так как для ромба $AB = AD$, то

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = AB^2 - AD^2 = 0, \text{ или } AC \perp BD.$$

380. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNPQ$ так, что вершины M , N , P и Q лежат соответственно на сторонах AB , BC , CD и DA .

Показать, что либо $MNPQ$ есть также квадрат, либо стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата $ABCD$.

Решение. Пусть $\overline{AD} = \mathbf{a}$, $\overline{AB} = \mathbf{b}$. Так как векторы \overline{AQ} и \overline{NC} коллинеарны \mathbf{a} , то $\overline{AQ} = \alpha \mathbf{a}$ и $\overline{CN} = \lambda \mathbf{a}$ (черт. 48).

Точно так же, в силу коллинеарности векторов \overline{AB} и \overline{AM} , \overline{AB} и \overline{CP} , получаем: $\overline{AM} = \beta \mathbf{b}$; $\overline{CP} = \mu \mathbf{b}$.

Воспользуемся далее тем, что $MNPQ$ — прямоугольник. Это означает, что выполнены следующие условия:

$$\overline{MQ} = \overline{NP} \text{ и } \overline{MQ} \cdot \overline{MN} = 0; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{MQ} &= \overline{AQ} - \overline{AM} = \alpha a - \beta b, \\ \overline{NP} &= \overline{CP} - \overline{CN} = \mu b - \lambda a, \\ \overline{MN} &= \overline{BN} - \overline{BM} = (\overline{BC} + \overline{CN}) - (\overline{BA} + \overline{AM}) = \\ &= (1 + \lambda) a + (1 - \beta) b. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставив эти значения в соотношения (1), получаем:

$$\alpha a - \beta b = \mu b - \lambda a; (\alpha a - \beta b) [(1 + \lambda) a + (1 - \beta) b] = 0.$$

Из первого соотношения в силу неколлинеарности a и b получаем $\alpha = -\lambda$, $\beta = -\mu$. Из второго соотношения имеем:

$$\alpha (1 + \lambda) a^2 - \beta (1 - \beta) b^2 = 0.$$

Отсюда в силу равенства $a^2 = b^2$ получаем:

$$\alpha (1 + \lambda) - \beta (1 - \beta) = 0$$

или

$$\alpha (1 - \alpha) - \beta (1 - \beta) = 0, (\alpha - \beta) (1 - \alpha - \beta) = 0.$$

Возможны два случая:

а) $\alpha - \beta = 0$, $\alpha = \beta$. Тогда из соотношений (2) имеем:

$$\overline{MQ} = \alpha (a - b), \overline{MN} = (1 - \alpha) (a + b).$$

Эти соотношения показывают, что

$$\overline{MQ} \parallel (a - b) \text{ и } \overline{MN} \parallel (a + b)$$

т. е. стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата.

$$\begin{aligned} \text{б) } 1 - \alpha - \beta &= 0, \overline{MQ}^2 = \alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 = (\alpha^2 + \beta^2) a^2; \\ \overline{MN}^2 &= (1 - \alpha)^2 a^2 + (1 - \beta)^2 b^2 = [(1 - \alpha)^2 + (1 - \beta)^2] a^2 = \\ &= [2(1 - \alpha - \beta) + \alpha^2 + \beta^2] a^2 = (\alpha^2 + \beta^2) a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\overline{MQ}^2 = \overline{MN}^2$ или $MQ = MN$; в этом случае прямоугольник $MNPQ$ является квадратом.

381. Доказать, что в любом треугольнике ABC имеют место соотношения:

$$\text{а) } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

$$\text{б) } \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

где S — площадь $\triangle ABC$.

Пользуясь первым из этих соотношений, доказать теорему Пифагора.

Указание. а) полагая $\overline{CA} = a$, $\overline{CB} = b$, определить $c^2 = \overline{AB}^2$;

$$\text{б) } \operatorname{ctg} C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{ab}{|a||b|\sin C} = \frac{ab}{2S}.$$

Аналогично определить $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} A$.

382. Пусть у треугольной пирамиды $OABC$ введены обозначения: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$; $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, а плоские углы при вершине O прямые. Показать, что

$$\operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta : \operatorname{ctg} \gamma = a^2 : b^2 : c^2.$$

Указание. Положить $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ и $\overline{OC} = c$.

383. Показать, что если AM — биссектриса треугольника ABC , то

$$\overline{AM} = \frac{b \cdot \overline{AB} + c \cdot \overline{AC}}{b + c},$$

где $b = AC$, $c = AB$.

(1)

Пользуясь этим соотношением:

а) вывести формулу для вычисления длины биссектрисы:

$$AM = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c};$$

б) доказать теорему: $\frac{BM}{MC} = \frac{b}{c}$.

Указание. Для вывода формулы (1) необходимо положить $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \lambda \overline{AC}}{1 + \lambda}$ и использовать результат задачи 337.

384. Вершина A треугольника соединена с точками A_1 , A_2 , делящими сторону BC на три равные части. Показать, что разность квадратов отрезков AA_1 и AA_2 в три раза меньше разности квадратов сторон, выходящих из вершины A .

385. Доказать, что если в некотором (не обязательно плоском) четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других сторон.

Доказать обратную теорему.

Указание. В данном четырехугольнике $ABCD$, полагая $\overline{AC} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AD} = c$, воспользоваться векторным тождеством:

$$2a(c - b) = c^2 - b^2 + (b - a)^2 - (c - a)^2.$$

386. Показать, что угол Θ между двумя противоположными ребрами произвольного тетраэдра вычисляется по формуле:

$$\cos \Theta = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}, \quad (1)$$

где a и a' — длины рассматриваемых ребер, а b и b' и c и c' — длины противоположных ребер двух других пар.

Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, а OA и BC — рассматриваемые ребра. Введем обозначения:

$$\overline{OA} = a, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c; \quad OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \\ BC = a', \quad AC = b', \quad AB = c'.$$

Искомое соотношение (1) может быть записано следующим образом: $2aa' \cos \Theta = c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2$ или

$$2a \cdot \overline{BC} = c^2 - b^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2, \quad 2a(c - b) = \\ = c^2 - b^2 + (b - a)^2 - (c - a)^2.$$

Пользуясь распределительным свойством скалярного произведения, непосредственно убеждаемся в справедливости этого соотношения.

387. Показать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

Указание. Использовать результат предыдущей задачи.

388. Зная длины всех шести ребер тетраэдра, определить длины всех отрезков, соединяющих попарно середины противоположных сторон.

389. Вершина параллелепипеда и центры трех противоположных для данной вершины граней служат вершинами пирамиды. Используя свойства смешанного произведения векторов, вычислить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем этой пирамиды.

390. Из вершины произвольного параллелепипеда проведены три диагонали прилежащих граней. Пользуясь свойствами смешанного произведения, установить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем пирамиды, боковыми ребрами которой служат эти диагонали.

Глава XI

ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 34. Составление уравнения плоскости по различным заданиям

Литература: [1], часть II, § 9—13; [2], глава X, п. 214—216; [3], § 141—145.

391. Определить координаты нескольких точек, лежащих в плоскости: $3x - 2y + z - 12 = 0$.

392. Определить координаты точки, имеющей абсциссу, равную единице и расположенной в плоскостях Oxz и $2x - y + z - 6 = 0$.

393. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через точку $A(0, 2, 3)$ и параллельной векторам $p_1\{1, 0, 1\}$, $p_2\{2, 1, 3\}$;

б) проходящей через три точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, 1, 3)$, $M_3(0, -1, 2)$;

в) проходящей через две точки $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(2, -1, 3)$ и параллельной вектору $p\{1, 2, 2\}$.

Решение. а) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной векторам $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $p_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Подставляя в это уравнение координаты точки и векторов из условия задачи, получим:

$$\begin{vmatrix} x & y - 2 & z - 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

или $x + y - z + 1 = 0$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Подставляя в это уравнение координаты данных точек, после элементарных преобразований получаем:

$$x + y - 4z + 9 = 0.$$

в) Плоскость, проходящая через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и параллельная вектору $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$, параллельна также вектору $\overline{M_1M_2}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, поэтому задача сводится к задаче а). Пользуясь соотношением (1), получаем уравнение данной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Подставив сюда данные задачи, после элементарных преобразований получаем:

$$6x + 2y - 5z + 5 = 0.$$

394. Найти уравнение плоскости:

а) проходящей через три точки $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 2, 3)$, $M_3(0, 3, 6)$;

б) проходящей через ось Ox и точку $A(1, 1, 1)$;

в) проходящей через точку $A(0, 0, 1)$ и параллельной векторам $p_1\{2, 1, 5\}$ и $p_2\{1, 0, 1\}$;

г) проходящей через точки $M_1(1, 0, 0)$, $M_2(0, 0, 1)$ и параллельной вектору $p\{2, 1, 2\}$.

395. Дан тетраэдр $ABCD$ и середина E ребра AB . Приняв точку A за начало координат и полагая $e_1 = \overline{AB}$, $e_2 = \overline{AC}$ и $e_3 = \overline{AD}$, написать уравнения всех граней тетраэдра и плоскости ECD .

Указание. Предварительно определить координаты точек A , B , C , D и E .

396. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четверки точек:

- а) $(3, 1, 0), (0, 1, 2), (-1, 0, -5), (4, 1, 5);$
 б) $(1, 1, 0), (1, -1, 2), (0, 4, -2), (3, 1, 2);$
 в) $(0, 0, -1), (1, 3, 4), (5, 0, -3), (4, 4, 1);$
 г) $(0, 0, 2), (3, 0, 5), (1, 1, 0), (4, 1, 2).$

397. Даны вершины тетраэдра $A(4, 0, 2), B(0, 5, 1), C(4, -1, 3)$ и $D(3, -1, 5)$.

а) Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной ребру CD .

б) Написать уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD .

398. Указать особенности расположения следующих плоскостей по отношению к системе координат:

- а) $x - z + 1 = 0;$ в) $x - y + 2 = 0;$ д) $x - 3 = 0;$
 б) $x + 2y + 3z = 0;$ г) $x + 2z = 0;$ е) $y + z + 1 = 0.$

399. Написать уравнения плоскостей:

а) проходящих через точку $M_0(1, 2, -1)$ и параллельных каждой из координатных плоскостей;

б) проходящих через две точки $M_1(1, 2, -4), M_2(2, 0, -3)$ и параллельных каждой из координатных осей;

в) проходящих через точку $M(2, 1, -5)$ и через каждую из координатных осей.

Решение. а) Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и параллельной координатной плоскости Oyz , имеет вид: $x = x_0$. Уравнения плоскостей, проходящих через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельных другим координатным плоскостям, запишутся так: $y = y_0$ и $z = z_0$.

В данном случае получаем: $x = 1, y = 2, z = -1$.

б) Плоскость π_1 , проходящая через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и параллельная оси Ox , параллельна векторам $\overline{M_1M_2}$ и e_1 , поэтому она задается уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(y - y_1)(z_2 - z_1) - (z - z_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

В данном случае получаем: $y + 2z + 6 = 0$.

Аналогично можно записать уравнения плоскостей, проходящих через точки M_1, M_2 и параллельных другим координатным осям

$$(\pi_2) \quad x - z - 5 = 0; \quad (\pi_3) \quad 2x + y - 4 = 0.$$

в) Этот пример сводится к предыдущему. В самом деле, плоскость, проходящая через данную точку $M(2, 1, -5)$ и через ось Ox , параллельна векторам \overline{OM} и e_1 , где O — начало координат. Отсюда получаем:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad 5y + z = 0.$$

Аналогично можно записать уравнения плоскостей, проходящих через данную точку и содержащих другие координатные оси:

$$5x + 2z = 0; \quad x - 2y = 0.$$

Для того чтобы убедиться в правильности результатов, достаточно подставить координаты данных точек в полученные уравнения и учесть условия параллельности плоскости и координатных векторов e_1, e_2 и e_3 .

400. Составить уравнение плоскостей, каждая из которых проходит через одну из осей координат и параллельна вектору $p\{1, -2, 3\}$.

401. Найти отрезки, которые отсекаются на осях координат:

а) плоскостью: $\frac{1}{2}x - 3y + z + 1 = 0;$

б) плоскостью, проходящей через точки $M_1(1, 1, 1), M_2(3, 1, 5), M_3(1, 2, 3)$.

402. Дано уравнение плоскости $2x - y + 3z + 2 = 0$. Написать для нее уравнение «в отрезках».

403. Плоскость проходит через точку $M(1, -2, 5)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$, а на оси аппликат отрезок $c = 1$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

404. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3, 2, 4)$ и отсекает на осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

405. Пусть в некоторой аффинной системе координат дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и вектор $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Доказать теорему: для того чтобы данная плоскость была параллельна вектору \mathbf{p} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \quad (1)$$

Решение. Если вектор \mathbf{p} параллелен данной плоскости π , то в этой плоскости найдутся такие две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, что $\mathbf{p} = \overline{M_1M_2}$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Вычитая из второго соотношения первое, будем иметь:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0.$$

Так как $\alpha = x_2 - x_1$, $\beta = y_2 - y_1$, $\gamma = z_2 - z_1$, то получаем соотношение (1).

Обратно, пусть выполнено условие (1). Возьмем произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в плоскости π , приложим вектор \mathbf{p} к этой точке и обозначим через $M_2(x_2, y_2, z_2)$ конец этого вектора.

Так как $\alpha = x_2 - x_1$, $\beta = y_2 - y_1$, $\gamma = z_2 - z_1$, то из соотношения (1) получаем:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \quad (3)$$

Точка M_1 лежит в данной плоскости, поэтому выполнено первое соотношение (2). Сложив первое соотношение (2) и соотношение (3), получаем: $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$.

Мы показали, что точка M_2 лежит в данной плоскости, т. е. вектор \mathbf{p} параллелен плоскости π .

406. Пользуясь предыдущей задачей, выяснить, какие из векторов

$$\mathbf{p}_1 \{1, -3, 4\}, \quad \mathbf{p}_2 \{0, 6, 4\}, \quad \mathbf{p}_3 \{-1, 0, 0\}, \quad \mathbf{p}_4 \{3, 0, 1\}$$

параллельны плоскости

$$x + 2y - 3z + 1 = 0.$$

407. В общей аффинной системе координат дана плоскость: $2x - y + 3z + 5 = 0$.

а) Определить координаты нескольких векторов, параллельных данной плоскости.

б) Определить координаты нескольких векторов, параллельных одновременно данной плоскости и одной из координатных плоскостей.

408. Написать уравнение плоскости

а) проходящей через точку $M_0(2, 3, -1)$ и перпендикулярной к вектору $n\{1, 2, -4\}$;

б) проходящей через начало координат и перпендикулярной к вектору $n\{0, -3, 4\}$.

Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к вектору $n\{A, B, C\}$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Учитывая условия задачи, получаем:

$$\text{а) } x + 2y - 4z - 12 = 0; \quad \text{б) } 3y - 4z = 0.$$

409. Дан тетраэдр: $A(-1, 2, 5)$, $B(0, -4, 5)$, $C(-3, 2, 1)$ и $D(1, 2, 4)$. Написать уравнения плоскостей, проходящих через вершину D и перпендикулярных к сторонам AB , BC и CA .

Система координат прямоугольная декартова.

410. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точек $A(2, -1, 3)$ и $B(4, 5, -3)$. Система координат прямоугольная декартова.

411. Найти координаты нормальных векторов плоскостей:

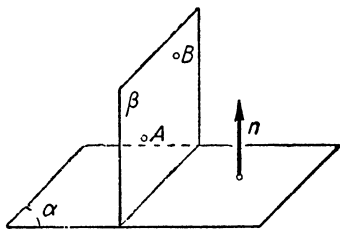
$$\begin{array}{ll} \text{а) } x + 2y - z + 1 = 0; & \text{в) } y + 1 = 0; \\ \text{б) } x - 3z + 5 = 0; & \text{г) } x - 3y + z + 4 = 0. \end{array}$$

Система координат прямоугольная декартова.

412. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, -1, 3)$ и $B(1, 2, 4)$ и перпендикулярной к плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Плоскость, перпендикулярная к плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$, будет параллельна нормальному вектору $n\{2, -3, 1\}$ этой плоскости (черт. 49). Поэтому



Черт. 49.

воспользовавшись уравнением (3) на стр. 151, мы получим следующее уравнение искомой плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $3x + y - 3z + 7 = 0$. (1)

Проверка. Плоскость (1) перпендикулярна к плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$, так как сумма произведений соответствующих коэффициентов при переменных равна нулю: $3 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$.

Плоскость (1) проходит через данные точки, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

413. Написать уравнение плоскости:

а) проходящей через начало координат и перпендикулярной к плоскостям: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$;

б) проходящей через точку $(1, 1, -2)$ и перпендикулярной к плоскостям: $2x + 3z = 0$ и $x - y + z = 1$.

Система координат прямоугольная декартова.

§ 35. Взаимное расположение плоскостей

Литература: [1], часть II, § 14, 17; [2], глава X, п. 217—220; [3], § 146, 147.

414. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:

а) $x - 3y + z + 1 = 0$, $2x + y - 4z + 2 = 0$;

б) $3x + y - z + 2 = 0$, $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;

в) $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0$, $2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + 2 = 0$;

г) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z = 0$.

Система координат аффинная.

415. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной:

а) плоскости $2x - 4y + 5z - 3 = 0$;

б) плоскости $2y - 7z + 6 = 0$;

в) плоскости $3x + 5 = 0$.

416. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -3, 5)$ и параллельной:

- а) плоскости $3x - y + z + 4 = 0$;
 б) плоскости $x - 3y + 7 = 0$;
 в) плоскости $3z - 4 = 0$.

417. Пусть в аффинной системе координат даны две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Доказать, что вектор $\mathbf{p} \left\{ \left| \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \right|, \left| \frac{C_1A_1}{C_2A_2} \right|, \left| \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \right| \right\}$ параллелен данным плоскостям и поэтому направлен вдоль линии пересечения данных плоскостей.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из задачи 405. В самом деле, вектор \mathbf{p} параллелен первой плоскости, так как:

$$A_1 \left| \frac{B_1C_1}{B_2C_2} \right| + B_1 \left| \frac{C_1A_1}{C_2A_2} \right| + C_1 \left| \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \right| = \left| \frac{A_1B_1C_1}{A_2B_2C_2} \right| = 0.$$

Точно так же можно показать, что \mathbf{p} параллелен второй плоскости.

Интересно отметить, что если плоскости даны в прямоугольной декартовой системе, то вектор \mathbf{p} является векторным произведением направляющих векторов данных плоскостей, поэтому он направлен вдоль линии пересечения этих плоскостей. В аффинной системе векторы с координатами $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ не являются нормальными векторами к данным плоскостям, однако вектор \mathbf{p} направлен вдоль их линии пересечения.

418. Даны две пересекающиеся плоскости:

$$x - 3y + 2z + 1 = 0, \quad 2x - y + z = 0.$$

Определить: а) координаты некоторой точки, лежащей на линии пересечения данных плоскостей; б) координаты вектора \mathbf{p} , параллельного этим плоскостям.

Система координат аффинная.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

419. Показать, что плоскости

$$2x - y + z - 4 = 0, \quad x + y - z - 2 = 0; \quad 2x - y + 3z - 6 = 0$$

пересекаются в одной точке и найти ее координаты.

420. Показать, что плоскости

$$x - y + z + 1 = 0; \quad 2x - y - 3z - 2 = 0; \quad 4x - 3y - z = 0$$

пересекаются по одной прямой.

421. Показать, что плоскости

$$x - y - z + 4 = 0; \quad 3x - z + 5 = 0; \quad 5x + y - z + 1 = 0$$

пересекаются по трем параллельным между собой прямым.

422. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

а) $3x - y + \frac{1}{2}z - 1 = 0, \quad 6x - 2y + z + 2 = 0;$

б) $x + y - 5z + 3 = 0;$
 $x + y - z + 1 = 0; \quad x + y - z = 0,$
 $-x - y + z - 1 = 0;$

в) $2x - y + 3z - \frac{1}{2} = 0, \quad 4x - 2y + 3z + 1 = 0,$
 $-2x + y - 3z + 2 = 0.$

423. Показать, что четыре плоскости

$$\begin{aligned} 5x - z + 3 &= 0, & 22x + 11y - 44z + 65 &= 0, \\ 3y + 2z - 1 &= 0, & 3x + 4y + 5z - 3 &= 0 \end{aligned}$$

пересекаются в одной точке; найти координаты этой точки.

424. В аффинной системе координат даны три плоскости:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При каких условиях, накладываемых на коэффициенты, эти плоскости пересекаются в одной и только в одной точке, лежащей в плоскости Oxy ?

Решение. Так как данные плоскости пересекаются в одной точке, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты их точки пересечения. Для того чтобы эта точка лежала в плоскости Oxy , необходимо и достаточно, чтобы $z_0 = 0$. Из правила Крамера решения системы трех линейных уравнений получаем:

$$z_0 = \frac{- \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0.$$

Таким образом, плоскости (1) будут пересекаться в одной точке, лежащей в плоскости Oxy в том и только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

425. В аффинной системе координат даны две пересекающиеся плоскости:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей пересекается с осью Oz ?

Решение. Пусть $(0, 0, z_0)$ — координаты точки, в которой пересекается линия пересечения данных плоскостей с осью Oz . Очевидно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям (1):

$$\left. \begin{aligned} C_1z_0 + D_1 &= 0, \\ C_2z_0 + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Возможны два случая:

а) $C_1 = C_2 = 0$, тогда $D_1 = D_2 = 0$ и данные плоскости пересекаются по оси Oz .

б) Один из коэффициентов, допустим C_1 , отличен от нуля. Определив из первого соотношения z_0 и подставив во второе, получаем: $\begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0$.

Таким образом, если линия пересечения плоскостей (1) пересекает ось Oz , то либо $C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0$, либо один из коэффициентов C_1 и C_2 отличен от нуля и $\begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0$.

Обратно, пусть плоскости (1) пересекаются по некоторой прямой и выполняется одно из условий а) и б). В первом случае линия пересечения плоскостей совпадает с осью Oz . Во втором случае рассмотрим ненулевые решения a и b системы:

$$\begin{aligned} C_1 a + D_1 b &= 0, \\ C_2 a + D_2 b &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, $b \neq 0$, так как один из коэффициентов C_1, C_2 отличен от нуля.

Отсюда следует, что точка $\left(0, 0, \frac{a}{b}\right)$ принадлежит обеим плоскостям (1), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Следующую задачу предлагаем решить самостоятельно.

426. В аффинной системе координат даны две пересекающиеся плоскости:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей лежит в плоскости Oxy ?

427. Плоскость π в прямоугольной декартовой системе задана уравнением $x + y - z + 1 = 0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения данной плоскости и плоскости Oxz , перпендикулярной к плоскости $x - 3y + z = 0$.

Решение. Напишем уравнение пучка, определяемого плоскостями π и Oxz :

$$(x + y - z + 1) + \lambda y = 0, \quad (1)$$

и подберем λ так, чтобы эта плоскость была перпендикулярна к плоскости $x - 3y + z = 0$.

Условие перпендикулярности плоскостей

$$x + (1 + \lambda)y - z + 1 = 0, \quad x - 3y + z = 0$$

запишется так:

$$1 \cdot 1 - 3(1 + \lambda) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Отсюда получаем: $\lambda = -1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (1), получаем уравнение искомой плоскости:

$$x - z + 1 = 0,$$

Аналогично решите следующие задачи:

428. В прямоугольной декартовой системе даны уравнения граней трехгранного угла:

$$\begin{array}{ll}(\pi_1) & 4x + 3y - 5z + 16 = 0, \\(\pi_2) & 3x - 2y - 4z + 7 = 0, \\(\pi_3) & x + 4y - 2z + 5 = 0.\end{array}$$

Написать уравнения трех плоскостей, каждая из которых проходит через некоторое ребро и перпендикулярна к противоположащей грани.

429. Через линию пересечения плоскостей

$$4x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 5y - z + 2 = 0$$

провести плоскость,

а) проходящую через точку $(1, 1, 1)$;

б) параллельную оси Oy .

430. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$ и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oyz .

Система координат прямоугольная декартова.

431. Через линию пересечения плоскостей

$$2x - y + z - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x + y - 3z - 1 = 0$$

провести плоскость так, чтобы она отсекала от оси Ox отрезок, равный 5.

§ 36. Расстояние от точки до плоскости; угол между плоскостями¹

Литература: [1], часть II, § 12, 15; [2], глава X, § 226 — 229; [3], § 148 — 151.

432. Привести к нормальному виду уравнения плоскостей:

$$\text{а) } x - 2y + 2z - 12 = 0; \quad \text{г) } 12y - 5z + 39 = 0;$$

$$\text{б) } 2x - 3y + 5z - 5 = 0; \quad \text{д) } y + 2 = 0;$$

$$\text{в) } \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 3 = 0; \quad \text{е) } 2z - 5 = 0.$$

¹ В задачах этого параграфа системы координат предполагаются прямоугольными декартовыми.

433. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости:

а) $15x - 10y + 6z - 190 = 0$;

б) $2x - 3y + 5z - 3 = 0$.

434. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ — искомое уравнение. Так как плоскость не проходит через начало координат, то $D' \neq 0$, поэтому, разделив уравнение на D' и вводя обозначения: $A = \frac{A'}{D'}$; $B = \frac{B'}{D'}$; $C = \frac{C'}{D'}$, получаем: $Ax + By + Cz + 1 = 0$.

Искомые коэффициенты A, B и C должны удовлетворять следующим условиям:

$A(-1) + C \cdot 1 + 1 = 0$ (точка M_1 принадлежит искомой плоскости),

$A + B + 2C + 1 = 0$ (точка M_2 принадлежит искомой плоскости),

$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (искомая плоскость отстоит от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$).

Из первых двух уравнений получаем: $C = A - 1$,

$B = -A - 2C - 1 = -A - 2(A - 1) - 1 = -3A + 1$.

Подставив эти значения в последнее уравнение, получим:

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{A^2 + (1 - 3A)^2 + (A - 1)^2} = \sqrt{11A^2 - 8A + 2}$,

или $44A^2 - 32A + 5 = 0$. Это уравнение имеет два решения:

$A = \frac{16 \pm 6}{44}$; $A_1 = \frac{5}{22}$; $A_2 = \frac{1}{2}$.

Из первых двух соотношений получаем:

$C_1 = -\frac{17}{22}$; $C_2 = -\frac{1}{2}$; $B_1 = \frac{7}{22}$; $B_2 = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, искомые уравнения имеют вид:

$$\frac{5}{22}x + \frac{7}{22}y - \frac{17}{22}z + 1 = 0, \text{ или}$$

$$5x + 7y - 17z + 22 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 = 0, \text{ или}$$

$$x - y - z + 2 = 0. \quad (2)$$

Проверка. Плоскости (1) и (2) проходят через точки M_1 и M_2 , в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Для проверки второго условия вычислим расстояния от плоскостей (1), (2) до начала координат:

$$\rho_1 = \frac{22}{\sqrt{25 + 49 + 289}} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad \rho_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

435. У треугольной пирамиды $SABC$ вершина S совпадает с началом координат, а боковые грани — с координатными плоскостями.

Написать уравнение плоскости основания ABC , если $SA:SB:SC = 1:3:2$, высота $SH = 6$ и вершины A , B и C имеют неотрицательные координаты.

Указание. Написать уравнение искомой плоскости в отрезках.

436. Через линию пересечения плоскостей

$$x - y + z - 1 = 0 \text{ и } 2x + 5y - 2z - 13 = 0$$

провести плоскость, касающуюся сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Указание. В пучке, определяемом данными плоскостями, выбрать плоскость, отстоящую от центра сферы на расстоянии, равном радиусу сферы.

437. Вычислить расстояние между следующими параллельными плоскостями:

$$x - 3y + 2z + 1 = 0,$$

$$2x - 6y + 4z + 3 = 0.$$

438. Вывести формулу для вычисления расстояния между двумя параллельными плоскостями:

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Пользуясь полученной формулой, проверить ответ предыдущей задачи.

Решение. Идея решения задачи заключается в следующем: возьмем некоторую точку на одной из плоскостей и вычислим расстояние от этой точки до другой плоскости.

Очевидно, в уравнениях плоскостей хотя бы один из коэффициентов A , B и C отличен от нуля. Если, например, $A \neq 0$, то точка $\left(-\frac{D_1}{A}, 0, 0\right)$ лежит в первой плоскости. Вычисляя расстояние от этой точки до второй плоскости, получаем:

$$\rho = \frac{|-D_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если $A = 0$, а B или $C \neq 0$, то, поступая аналогично, получаем тот же результат.

Уравнения плоскостей предыдущей задачи могут быть записаны так:

$$2x - 6y + 4z + 2 = 0, \quad 2x - 6y + 4z + 3 = 0,$$

поэтому

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{4 + 36 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{56}} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

439. Пользуясь формулой, выведенной при решении задачи 438, вычислить расстояние между следующими парами параллельных плоскостей:

$$\begin{aligned} \text{а) } x - 2y + 2z - 6 &= 0, & \text{в) } x - y + 5z + 27 &= 0, \\ x - 2y + 2z + 18 &= 0; & x - y + 5z - 54 &= 0; \\ \text{б) } 2x - 3y + 6z - 14 &= 0, & \text{г) } x - y + 5z + 27 &= 0, \\ 4x - 6y + 12z - 21 &= 0; & x - y + 5z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

440. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(1, 1, 4)$ и от плоскости $2x - 2y + z - 12 = 0$.

441. На оси Oy найти точку, равноудаленную от двух плоскостей:

$$x + 2y - 2z - 1 = 0 \text{ и } 3x + 5 = 0.$$

442. Составить уравнение геометрического места точек, отстоящих от плоскости $2x - y + 2z - 3 = 0$ на расстоянии, равном трем.

443. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей:

а) $2x - y + 3z - 4 = 0, \quad 2x - y + 3z - 5 = 0;$

б) $x + y - 2z - 3 = 0, \quad x + y - 2z + 7 = 0;$

в) $3x - y + z + 5 = 0, \quad 3x - y + z + 15 = 0.$

444. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей:

а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 5 = 0;$

б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0, \quad 6x - 3z + 2 = 0.$

445. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями:

$$3x - y + 7z - 4 = 0 \text{ и } 5x + 3y - 5z + 2 = 0.$$

§ 37. Уравнения прямой; задачи на сочетание прямых и плоскостей

Литература: [1], часть II, § 18 — 28; [2], глава XI, п. 231 — 240; [3], § 152 — 163.

446. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых:

а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1};$

б) $x = 3 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 5;$

в) $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$

447. Определить координаты точки, лежащей на пря-

мой $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{5}$ и имеющей:

а) абсциссу, равную трем;

б) ординату, равную -1 .

448. Составить уравнения прямой:

а) проходящей через две точки $M_1 \left(2, -3, \frac{1}{2}\right)$, $M_2 \left(3, 5, \frac{3}{2}\right)$;

б) проходящей через точку $M_0(2, 1, -3)$ и параллельной вектору $\mathbf{p}(1, -3, 1)$;

в) образованной пересечением плоскости $x + 3y - z + 1 = 0$ с координатной плоскостью Oxy ;

г) образованной пересечением плоскости $x - y + z = 0$ с плоскостью, проходящей через точки $A(2, 0, 3)$, $B(1, 1, 1)$, $C(2, 4, -3)$.

449. Написать параметрические уравнения следующих прямых:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Решение. Если прямая задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

то для перехода к параметрическим уравнениям необходимо определить направляющий вектор прямой и некоторую точку.

Направляющий вектор \mathbf{p} прямой (1), как следует из задачи 417, определяется следующим образом:

$$\mathbf{p} \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

За начальную точку можно взять любую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1).

Определив координаты вектора p и точки M_0 , получаем параметрические уравнения прямой в следующем виде:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t, \quad y = y_0 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t,$$

$$z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t.$$

Предлагаем студенту-заочнику по намеченному плану самостоятельно получить параметрические уравнения данных прямых.

450. Доказать, что

а) прямая $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oy ;

б) прямая $\begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$ пересекает координатные плоскости.

натные плоскости.

Определить координаты точек пересечений.

451. Установить взаимное расположение следующих прямых:

$$x = 1 + 2t, \quad y = 7 + t, \quad z = 3 + 4t$$

и

$$x = 6 + 3t, \quad y = -1 - 2t, \quad z = -2 + t.$$

Решение. Для того чтобы установить взаимное расположение двух прямых, проще всего сначала определить их направляющие векторы и координаты двух произвольных точек, лежащих соответственно на данных прямых.

Если p_1 и p_2 — направляющие векторы прямых, а M_1 и M_2 — точки, принадлежащие им, то возможны следующие случаи:

1. Векторы p_1 , p_2 и $\overline{M_1 M_2}$ попарно коллинеарны. В этом случае прямые совпадают.

2. Векторы p_1 и p_2 коллинеарны, а вектор $\overline{M_1 M_2}$ им не коллинеарен. В этом случае прямые параллельны.

3. Векторы p_1 и p_2 не коллинеарны, но p_1 , p_2 и $\overline{M_1 M_2}$ компланарны. В этом случае прямые пересекаются.

4. Векторы p_1 , p_2 и $\overline{M_1M_2}$ не компланарны; прямые скрещиваются.

Из параметрических уравнений данных прямых получаем:

$M_1(1, 7, 3)$, $p_1\{2, 1, 4\}$, $M_2(6, -1, -2)$, $p_2\{3, -2, 1\}$. Векторы p_1 и p_2 не коллинеарны, но p_1 , p_2 , $\overline{M_1M_2}$ компланарны, так как

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Данные прямые пересекаются.

452. Установить взаимное расположение следующих пар прямых:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

453. Доказать, что прямые

$$x = 2 + 4t, \quad y = -6t, \quad z = -1 - 8t$$

и

$$x = 7 - 6t, \quad y = 2 + 9t, \quad z = 12t$$

лежат в одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

454. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0, \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

пересекаются. Написать уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

455. Доказать, что следующие пары прямых параллельны.

$$а) \quad x = 1 + 2t, \quad y = -t, \quad z = 1 + t \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$$

$$б) \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

456. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \text{параллельную прямой:}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

457. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 1, -3)$ и параллельную прямым:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x + 2y - 4z + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y - z = 0, \\ x + y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

458. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей каждую из прямых

$$\begin{aligned} x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3 + t; & \quad (1) \\ x = 2 + 2t, \quad y = 3 - t, \quad z = 4 + 3t. & \quad (2) \end{aligned}$$

Решение. Первый способ. Искомая прямая является линией пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через начало координат и через одну из данных прямых.

Так как прямая (1) проходит через точку $M(0, 1, 3)$ и параллельна вектору $p_1\{1, -1, 1\}$, то плоскость, проходящая через эту прямую и начало координат, имеет уравнение:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - z = 0.$$

Аналогично получаем уравнение плоскости, проходящей через прямую (2) и начало координат:

$$13x + 2y - 8z = 0.$$

Следовательно, искомая прямая имеет уравнения:

$$\begin{cases} 4x + 3y - z = 0, \\ 13x + 2y - 8z = 0. \end{cases}$$

Второй способ. Так как искомая прямая проходит через точку $O(0, 0, 0)$, то для составления ее уравнения достаточно определить координаты направляющего вектора $p \{ \alpha, \beta, \gamma \}$. Записывая условия пересечения искомой прямой с данными прямыми, получим:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 4\alpha + 3\beta - \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 13\alpha + 2\beta - 8\gamma = 0. \quad (2)$$

Выражая γ и β через α , будем иметь:

$\gamma = \frac{31}{22}\alpha$; $\beta = -\frac{19}{22}\alpha$, откуда вектор $p \{ 22, -19, 31 \}$ будет одним из направляющих векторов прямой. Таким образом, искомая прямая имеет следующие параметрические уравнения:

$$x = 22t, \quad y = -19t, \quad z = 31t.$$

459. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(0, 0, 1)$ и пересекающей каждую из прямых:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, & \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}. \\ 2x - y + 2z - 3 = 0; \end{cases}$$

460. Доказать, что прямая

$$x = 1 + 2t; \quad y = 3t; \quad z = -2 + t$$

пересекает плоскость $2x - y + z + 1 = 0$. Найти координаты точки пересечения.

461. Показать, что прямая

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$$

параллельна плоскости $x - 2y + 5z - 6 = 0$, а прямая

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}$$

лежит в этой плоскости.

462. Через точку пересечения плоскости $x - 2y + 3z + 5 = 0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была параллельна плоскости Oyz .

§ 38. Метрические задачи на сочетание прямых и плоскостей¹

463. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(2, -3, 3)$ и перпендикулярной к плоскости

$$x - 3y + 4z - 1 = 0.$$

464. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -3, 4)$ и перпендикулярной к прямой:

$$a) \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{5}; \quad б) \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

465. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 3, -1)$, пересекающей прямую

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$$

и перпендикулярной к ней.

466. Через точку $M(1, 5, -1)$ провести прямую, перпендикулярную к прямым:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}; \quad \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

467. Через точку $M(1, 5, -1)$ провести прямую, перпендикулярную к прямым:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0, \\ -x + 2y + 2z - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ 2x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

¹ В задачах этого параграфа системы координат предполагаются прямоугольными декартовыми.

468. Составить уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

на координатные плоскости. Составить уравнения проекций данной прямой на координатные плоскости.

Решение. Для того чтобы написать уравнение плоскости, проектирующей данную прямую (1) на координатную плоскость Oxy , напомним уравнение пучка, определяемого прямой (1):

$$(2x - y + 3z - 1) + \lambda(x + y - z + 5) = 0. \quad (2)$$

Подберем λ так, чтобы эта плоскость была перпендикулярна к плоскости $z = 0$ (см. решение задачи 427):

$$(2 + \lambda) \cdot 0 + (\lambda - 1) \cdot 0 + (3 - \lambda) \cdot 1 = 0.$$

Отсюда получаем: $\lambda = 3$. Подставив найденное значение λ в уравнение (2), получим уравнение проектирующей плоскости:

$$5x + 2y - 14 = 0. \quad (3)$$

Проекция данной прямой (1) на плоскость Oxy есть линия пересечения плоскости Oxy с плоскостью (3), поэтому она имеет уравнения:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 14 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем уравнения проектирующих плоскостей и проекций данной прямой на плоскость Oxz :

$$3x + 2z + 4 = 0, \quad \begin{cases} 3x + 2z + 4 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

и на плоскость Oyz :

$$3y - 5z + 11 = 0, \quad \begin{cases} 3y - 5z + 11 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

469. Решить вопросы предыдущей задачи для прямых:

$$\text{а) } \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

470. Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $3x - y + z - 4 = 0$.

471. Составить уравнения проекции прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1}$$

на плоскость $3x - y + z - 1 = 0$.

472. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельной прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ и перпендикулярной к плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$.

Решение. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение искомой плоскости. Воспользуемся условиями задачи.

а) Искомая плоскость проходит через начало координат, поэтому $D = 0$.

б) Искомая плоскость параллельна прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1},$$

поэтому (см. задачу 405):

$$2A + 3B - C = 0.$$

в) Искомая плоскость перпендикулярна к плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$, поэтому

$$1 \cdot A - 2 \cdot B + 1 \cdot C = 0.$$

Таким образом, искомые коэффициенты определяются из соотношений:

$$2A + 3B - C = 0, \quad A - 2B + C = 0, \quad D = 0.$$

Очевидно, $A \neq 0$, так как в противном случае $B = 0$ и $C = 0$. Положив $A = 1$, определяем B и C :

$$B = -3, \quad C = -7.$$

Таким образом, искомая плоскость определяется уравнением:

$$x - 3y - 7z = 0.$$

Проверка. Плоскость $x - 3y - 7z = 0$ проходит через начало координат, так как в ее уравнении отсутствует свободный член. Эта плоскость параллельна данной прямой в силу соотношения:

$$2 - 3 \cdot 3 - 7(-1) = 0.$$

Легко убедиться также в том, что плоскость $x - 3y - 7z = 0$ перпендикулярна к данной плоскости.

473. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 1, 3)$, параллельной прямой $x = y = z$ и перпендикулярной к плоскости:

$$3x - 2y = 0.$$

474. Через точку пересечения плоскости $2x - y + 3z - 4 = 0$ с осью Oy провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была перпендикулярна к прямой

$$\begin{cases} x - y + 4z - 1 = 0, \\ 2x + y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

475. Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

476. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1} \text{ и } \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-3}.$$

477. Даны две прямые

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2} \text{ и } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0};$$

а) доказать, что они скрещиваются;

б) написать уравнения плоскостей, проходящих через каждую из них параллельно второй прямой;

в) найти расстояние между скрещивающимися прямыми и между плоскостями; убедиться в том, что эти расстояния равны.

478. Найти угол между прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+12}{3} = \frac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x + 15y - 10z = 0$.

479. Найти угол между следующими прямыми:

$$\begin{cases} y + 1 = 0, \\ x + 2z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

480. Определить угол между прямой

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

и плоскостью $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

§ 39. Аналитическое доказательство некоторых стереометрических теорем¹

481. Доказать, что если прямая l и плоскость α перпендикулярны к одной и той же прямой l' , то они параллельны между собой.

Доказательство. Пусть в произвольно выбранной прямоугольной декартовой системе данные прямые l и l' и плоскость α имеют уравнения:

$$(l) \quad \frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3},$$

$$(l') \quad \frac{x-x_1}{p'_1} = \frac{y-y_1}{p'_2} = \frac{z-z_1}{p'_3},$$

$$(\alpha) \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Так как $l \perp l'$, то

$$p_1 p'_1 + p_2 p'_2 + p_3 p'_3 = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, в силу того, что $\alpha \perp l'$, имеем:

$$p'_1 = \lambda A, \quad p'_2 = \lambda B, \quad p'_3 = \lambda C.$$

Подставив эти выражения в (1), получаем:

$$\lambda p_1 + \lambda p_2 + \lambda p_3 = 0.$$

¹ В этом параграфе термин «параллельность» понимается в широком смысле слова. Например, предложение «прямая l параллельна плоскости α » следует понимать так: либо $l \parallel \alpha$ в обычном смысле, либо l принадлежит α .

Это соотношение показывает, что направляющий вектор прямой l параллелен плоскости α . Таким образом, прямая l либо параллельна плоскости α , либо принадлежит этой плоскости.

482. Доказать, что если плоскость α и прямая l перпендикулярны к одной и той же плоскости β , то они параллельны между собой.

483. Доказать, что если прямая l параллельна двум пересекающимся плоскостям α и α' , то она параллельна их линии пересечения.

Доказательство. Пусть в некоторой аффинной системе координат данные плоскости α и α' и прямая l имеют уравнения:

$$(\alpha) \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

$$(\alpha') \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad (2)$$

$$(l) \quad \frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}. \quad (3)$$

Так как $l \parallel \alpha$ и $l \parallel \alpha'$, то

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0, \quad A'p_1 + B'p_2 + C'p_3 = 0. \quad (4)$$

В силу того что плоскости α и α' пересекаются, коэффициенты в уравнениях (1) и (2) не пропорциональны, поэ-

тому хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ не равен нулю. Пусть, например, $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$.

Решив систему (4) относительно p_1 и p_2 , получаем:

$$p_1 = -\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} p_3, \quad p_2 = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} p_3.$$

Если ввести обозначение $\frac{p_3}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \lambda$, то предыдущие

соотношения запишутся так:

$$p_1 = \lambda \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad p_2 = \lambda \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \quad p_3 = \lambda \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Таким образом, векторы

$$\{p_1, p_2, p_3\} \text{ и } \left\{ \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right\}$$

коллинеарны. Так как второй вектор параллелен линии пересечения данных плоскостей (см. задачу 417), то теорема доказана.

484. Доказать, что две параллельные плоскости пересекают третью плоскость по параллельным прямым.

485. Доказать, что если две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой l и если другая прямая l' проведена в плоскости α и перпендикулярна к l , то l' перпендикулярна к β .

У к а з а н и е. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы плоскость α совпала с плоскостью Oxy .

486. В пространстве даны две прямые l_1 и l_2 . При каком условии через l_1 можно провести плоскость, перпендикулярную к l_2 ?

Решение. Пусть прямые l_1 и l_2 даны своими уравнениями в прямоугольной декартовой системе:

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2}. \quad (1)$$

Сначала предположим, что через прямую l_1 можно провести плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, перпендикулярную к прямой l_2 . Так как эта плоскость проходит через прямую l_1 , то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0$. Кроме того, плоскость перпендикулярна к l_2 , поэтому векторы $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ и $\{A, B, C\}$ коллинеарны, т. е. $A = \lambda\alpha_2$, $B = \lambda\beta_2$, $C = \lambda\gamma_2$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\lambda(\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1) = 0$. В силу условия $\lambda \neq 0$ будем иметь:

$$\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 = 0. \quad (2)$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что если через l_1 проходит плоскость, перпендикулярная к l_2 , то $l_1 \perp l_2$.

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $l_1 \perp l_2$. Рассмотрим плоскость:

$$\alpha_2(x - x_1) + \beta_2(y - y_1) + \gamma_2(z - z_1) = 0. \quad (3)$$

Очевидно, прямая l_1 лежит в плоскости (3), так как точка $\{x_1, y_1, z_1\}$ принадлежит этой плоскости и вектор

$\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ параллелен ей. Последнее утверждение следует из условия (2) (см. задачу 405). Кроме того, направляющий вектор плоскости (3) совпадает с направляющим вектором прямой l_2 , поэтому плоскость (3) перпендикулярно к l_2 .

Итак, для того чтобы через l_1 можно было провести плоскость, перпендикулярную к l_2 , необходимо и достаточно, чтобы $l_1 \perp l_2$.

487. Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести одну и только одну плоскость, параллельную другой прямой.

488. Доказать, что внутренние равноделящие плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Указание. Вершину трехгранного угла принять за начало координат, а одну из граней — за плоскость Oxy .

§ 40. Приложение теории прямой и плоскости к решению задач элементарной геометрии

489. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех вершин данного треугольника.

490. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых от двух данных точек постоянна.

491. Доказать, что в тетраэдре все шесть плоскостей, проходящих через каждое ребро и через середину не пересекающегося с ним ребра, проходят через одну точку.

Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр. Примем за начало координат точку O , а за координатные векторы $e_1 = \overrightarrow{OA}$, $e_2 = \overrightarrow{OB}$, $e_3 = \overrightarrow{OC}$. Обозначив середины ребер OA , OB , OC , AB , BC , CA соответственно через M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 и M_6 будем иметь:

$$M_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), M_2\left(0, \frac{1}{2}, 0\right), M_3\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \\ M_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), M_5\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), M_6\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда легко получить уравнения данных плоскостей:

$$\begin{array}{ll} (OAM_5) & y - z = 0, & (ABM_3) & x + y + 2z = 1, \\ (OBM_6) & x - z = 0, & (BCM_1) & 2x + y + z = 1, \\ (OCM_4) & x - y = 0, & (CAM_2) & x + 2y + z = 1. \end{array}$$

Легко убедиться в том, что все эти плоскости проходят через точку $Q\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Других общих точек плоскости не имеют.

492. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к ребрам треугольной пирамиды и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

493. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из концов диагонали параллелограмма на плоскость, проходящую через другую диагональ, равны по длине.

Указание. Систему координат выбрать так, чтобы данная плоскость совпала с плоскостью Oxy , а концы диагонали, лежащей в этой плоскости, имели координаты $(0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0)$.

Ввести в рассмотрение координаты концов другой диагонали и вычислить расстояния от этих концов до плоскости Oxy .

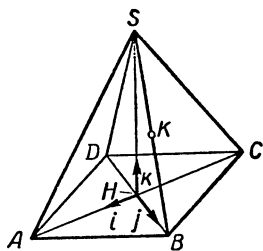


Рис. 50.

494. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань наклонена к основанию под углом β . Найти угол φ между плоскостями AKC и SAB , если K — середина ребра SB .

Решение. Для решения задачи сначала необходимо выбрать систему координат. За начало прямоугольной декартовой системы координат возьмем основание H высоты SH , опущенной из вершины S на плоскость $ABCD$ (черт. 50), а за координатные оси — диагонали AC , BD и высоту SH . Положительные направления осей выберем так, как указано на чертеже 50. Если $AC = BD = 2a$, $SH = h$, то вершины пирамиды и точка K будут иметь координаты:

$$\begin{aligned} A(a, 0, 0), \quad B(0, a, 0), \quad C(-a, 0, 0), \\ D(0, -a, 0), \quad S(0, 0, h), \quad K(0, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}). \end{aligned}$$

Запишем уравнения плоскостей SAB , ABC и AKC . Плоскость ABC совпадает с координатной плоскостью Oxy , поэтому она имеет уравнение:

$$z = 0. \quad (1)$$

Плоскость SAB отсекает на координатных осях отрезки a , a , h , поэтому она имеет уравнение «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{h} = 1. \quad (2)$$

Уравнение третьей плоскости AKC легко записать как уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку K :

$$-hy + az = 0.$$

По уравнениям (1), (2) определяем

$$\cos \beta = \frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} = \frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{h^2}}} = \frac{a}{\sqrt{2h^2 + a^2}}. \quad (4)$$

По уравнениям (2) и (3) определяем

$$\cos \varphi = \frac{-\frac{h}{a} + \frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{h^2}} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a^2 - h^2}{\sqrt{2h^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Если ввести обозначение $k = \frac{h}{a}$, то из предыдущих соотношений легко получить:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{2k^2 + 1}}, \\ \cos \varphi &= \frac{1 - k^2}{\sqrt{2k^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + k^2}} = \frac{1 - k^2}{\sqrt{1 + k^2}} \cos \beta. \end{aligned}$$

Из первого соотношения получаем $k^2 = \frac{1 - \cos^2 \beta}{2 \cos^2 \beta}$. Подставив это выражение во второе соотношение после элементарных преобразований, получаем:

$$\cos \varphi = \frac{3 \cos^2 \beta - 1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \beta)}}.$$

495. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота SH равна h , сторона основания равна a . Найти угол φ между плоскостями AKC и HBC , где K — середина ребра SB .

496. Доказать, что для высоты h треугольной пира-

миды с взаимно перпендикулярными боковыми ребрами, равными a , b и c , справедливо соотношение:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

У к а з а н и е. Боковые ребра принять за координатные оси и написать уравнение основания «в отрезках»; далее вычислить расстояние от начала координат до этой плоскости.

497. Доказать, что во всяком тетраэдре четыре прямые, соединяющие каждую вершину с центром тяжести противоположной грани, пересекаются в одной точке.

Решение. Примем вершину O данного тетраэдра $OABC$ за начало аффинной системы координат, а векторы $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$ — за координатные векторы. В этой системе вершины тетраэдра имеют координаты: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, поэтому центры тяжести граней имеют координаты (см. задачу 321):

$$\begin{aligned} OAB & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right), & OAC & \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3} \right), \\ OBC & \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), & ABC & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Если обозначить через l_1 , l_2 , l_3 и l_4 прямые, соединяющие соответственно вершины O , A , B и C с центрами тяжести противоположных граней, то легко записать уравнения этих прямых:

$$(l_1) \quad \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}, \text{ или } x = y = z;$$

$$(l_2) \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}, \text{ или } -\frac{1}{3}(x-1) = y = z;$$

$$(l_3) \quad \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{\frac{1}{3}}, \text{ или } x = -\frac{1}{3}(y-1) = z;$$

$$(l_4) \quad \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-1}, \text{ или } x = y = -\frac{1}{3}(z-1).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что все эти прямые проходят через точку $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Аналогично решите следующую задачу.

498. Доказать, что во всяком тетраэдре три прямые, соединяющие середины непересекающихся ребер, пересекаются в одной точке.

499. В усеченной (параллельно основанию) треугольной пирамиде $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ середина каждого из боковых ребер A_1A_1' , A_2A_2' , A_3A_3' соединена с точкой пересечения диагоналей противоположной боковой грани. Доказать, что полученные три прямые пересекаются в одной точке.

У к а з а н и е. Пусть O — точка пересечения ребер A_1A_1' , A_2A_2' , и A_3A_3' . Принять точку O за начало аффинной системы координат, а векторы $e_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $e_3 = \overrightarrow{OA_3}$ — за координатные векторы.

500. Дан куб, ребро которого равно a . Вычислить расстояние между вершиной A куба и его диагональю, не проходящей через точку A и лежащей в том диагональном сечении куба, которое содержит эту точку.

Глава XII

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Литература: [1], часть II, § 34—37; [2], глава VIII, п. 186—191; [3], § 198—202.

§ 41. Формулы преобразования координат точек

501. Написать формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

$$e_1' \{1, 3, 0\}, \quad e_2' \{0, -3, 1\}, \quad e_3' \{1, 1, -2\}, \quad O' (0, 3, -1).$$

Решение. Если

$e_1' \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $e_2' \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $e_3' \{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, $O' (x_0, y_0, z_0)$ — координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, то, как известно, старые координаты точек выражаются через новые при помощи следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + x_0, \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + y_0, \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + z_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для выражения x' , y' , z' через x , y , z следует решить эту систему относительно x' , y' , z' . Система, очевидно, имеет единственное решение, так как

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пользуясь формулами (1), получаем:

$$\begin{aligned}x &= 1x' + z', \\y &= 3x' - 3y' + z' + 3, \\z &= y' - 2z' - 1.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить выражения x' , y' , z' через x , y , z :

$$\begin{aligned}x' &= \frac{5}{8}x + \frac{1}{8}y + \frac{3}{8}z, \\y' &= \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + 1, \\z' &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{3}{8}z.\end{aligned}$$

502. Написать формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

- а) $e_1' \{1, 0, 0\}$, $e_2' \{2, 4, 0\}$, $e_3' \{-3, 1, \frac{1}{2}\}$, $O'(0, 0, 0)$;
 б) $e_1' \{-1, 1, 0\}$, $e_2' \{2, -1, 0\}$, $e_3' \{0, 0, 5\}$, $O'(5, 0, -2)$;
 в) $e_1' \{-1, 0, 0\}$, $e_2' \{0, 1, 0\}$, $e_3' \{0, 0, -1\}$, $O'(1, 1, 2)$;
 г) $e_1' \{1, 0, 0\}$, $e_2' \{0, 1, 0\}$, $e_3' \{0, 0, 1\}$, $O'(2, 5, -1)$.

503. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned}\text{а) } x &= x' - 3y' + z', & \text{б) } x' &= x + 1, \\y &= x' + y', & y' &= y - 3, \\z &= x' + 1; & z' &= z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{в) } x &= x' - y' + z' + 1, & \text{г) } x &= y', \\y &= -x' - y' + 2z' + 2, & y &= x', \\z &= z' - 3; & z &= x' + y' + z' + 1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{д) } x &= -x' + 1, \\y &= -y' + 1, \\z &= z' + 1.\end{aligned}$$

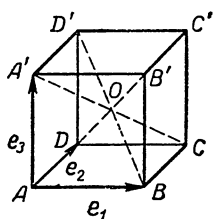
504. Пусть $ABCD A'B'C'D'$ — некоторый куб, O — точка пересечения диагоналей. Написать формулы преобра-

зования координат точек, если $A e_1 e_2 e_3$ — старая система, а $O e'_1 e'_2 e'_3$ — новая система, где $e_1 = \overline{AB}$, $e_2 = \overline{AD}$, $e_3 = \overline{AA'}$, $e'_1 = \overline{OA}$, $e'_2 = \overline{OB}$, $e'_3 = \overline{OC}$.

Решение. Сначала определим координаты нового начала и новых координатных векторов e'_1, e'_2, e'_3 в старой системе (черт. 51). Точки O, A, B, C , очевидно, имеют координаты:

$$O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad A(0, 0, 0)$$

$$B(1, 0, 0), \quad C(1, 1, 0).$$



Черт. 51.

Отсюда следует, что векторы e'_1, e'_2 и e'_3 имеют координаты:

$$e'_1 \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \quad e'_2 \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\},$$

$$e'_3 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\},$$

поэтому формулы преобразования имеют вид:

$$x = -\frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} y' + \frac{1}{2} z' + \frac{1}{2},$$

$$y = -\frac{1}{2} x' - \frac{1}{2} y' + \frac{1}{2} z' + \frac{1}{2},$$

$$z = -\frac{1}{2} x' - \frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} z' + \frac{1}{2}.$$

Аналогично решите следующую задачу.

505. Дан тетраэдр $OABC$. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от аффинной системы $O, e_1 = \overline{OA}, e_2 = \overline{OB}, e_3 = \overline{OC}$ к аффинной системе $O' \equiv A, e'_1 = \overline{AO}, e'_2 = \overline{AB}, e'_3 = \overline{AC}$.

506. Могут ли формулы

$$x = x' + 2y' + z' - 1,$$

$$y = 2x' - y' + z',$$

$$z = 3x' + y' + 2z' + 1$$

служить формулами преобразования координат? Объяснить результат.

507. Какие из приведенных ниже матриц ортогональны?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

508. Даны формулы преобразования координат точек:

$$x = 2 + \frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{6}{7}z', \quad y = 1 + \frac{6}{7}x' + \frac{2}{7}y' - \frac{3}{7}z',$$

$$z = 3 + \frac{3}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{2}{7}z'.$$

Является ли новая система координат прямоугольной декартовой, если исходная система—прямоугольная и декартова?

509. Найти формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ к декартовой¹ системе $Ox'y'z'$, если начало новой систе-

¹ Система называется декартовой, если координатные векторы единичные, а углы между ними произвольные.

мы совпадает с началом O старой системы, ось Oz' совпадает с осью Oz , а лучи Ox' и Oy' являются соответственно биссектрисами углов xOz и yOz .

§ 42. Изменение уравнения геометрического места при преобразовании координат точек

510. В системе $Oijk$ дана поверхность 2-го порядка $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0$.

Определить уравнение той же поверхности в новой прямоугольной декартовой системе $O'i'j'k'$, если

$$O'(1, -1, 1), \quad i' \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}, \\ j' \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}, \quad k' \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\}.$$

Указание. Задача решается точно так же, как и задача 225.

511. Координаты точек геометрического места удовлетворяют уравнению

$$3x^2 + y^2 - 2xz + 2x - 6y + 4z - 5 = 0.$$

Какому условию будут удовлетворять новые координаты точек того же геометрического места, если перенести начало координат в точку $O'(2, 3, 7)$?

512. Ответить на следующие вопросы:

а) Существует ли такая прямоугольная¹ система координат, в которой эллипсоид задается уравнением:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1?$$

б) Существует ли такая прямоугольная система координат, в которой однополостный (двуполостный) гиперboloид задается уравнением:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (x^2 - y^2 - z^2 = 1)?$$

в) Существует ли такая прямоугольная система координат, в которой гиперболический (эллиптический) параболоид имеет уравнение:

¹ Не обязательно декартова!

$$x^2 - y^2 = z \quad (x^2 + y^2 = z)?$$

Решение. а) Пусть эллипсоид задан в канонической системе уравнением: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Мы разыскиваем такую новую систему координат, в которой уравнение поверхности имеет вид:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \quad (1)$$

Сравнивая эти два уравнения, приходим к выводу, что если существует такая система координат, при переходе к которой формулы преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c}, \quad (2)$$

то в новой системе эллипсоид будет иметь уравнение (1). Формулы (2) являются формулами преобразования координат, так как x' , y' , z' выражаются через x , y , z линейно и определитель системы (2) не равен нулю.

Из формул (2) получаем:

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'. \quad (3)$$

Отсюда следует, что координаты нового начала и новых координатных векторов e_1' , e_2' , e_3' определяются так:

$$O'(0, 0, 0), \quad e_1' \{a, 0, 0\}, \quad e_2' \{0, b, 0\}, \quad e_3' \{0, 0, c\}.$$

Аналогично решите примеры б) и в).

513. Дана поверхность второго порядка. Как преобразовать систему координат, чтобы в уравнении поверхности в новой системе отсутствовал свободный член? Для всякой ли поверхности существует такая система координат?

514. Как преобразуется уравнение поверхности $z = xy$, если, не меняя ось Oz , принять биссектрисы угла Oxy за новые оси абсцисс и ординат?

Предполагается, что обе системы координат прямоугольные декартовы.

515. Гиперболический параболоид задан уравнением в канонической системе координат. Можно ли выбрать новую систему координат так, чтобы в этой системе уравнение поверхности не содержало членов первой степени?

Решение. Задача решается по аналогии с задачей 231. Пусть гиперболический параболоид в канонической системе имеет уравнение:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (1)$$

Предположим, что существует такая новая система координат

$O'(x_0, y_0, z_0)$, $e'_1 \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $e'_2 \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $e'_3 \{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, в которой уравнение гиперболического параболоида не содержит членов первой степени.

Формулы преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + x_0, & y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + y_0, \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + z_0. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение (1), получим уравнение поверхности в новой системе:

$$\frac{(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' + x_0)^2}{p} - \frac{(\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + y_0)^2}{q} = 2(\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' + z_0).$$

Так как в этом уравнении коэффициенты при x' , y' и z' должны быть равны нулю, то

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha_1 x_0}{p} - \frac{2\beta_1 y_0}{q} &= 2\gamma_1, & \frac{2\alpha_2 x_0}{p} - \frac{2\beta_2 y_0}{q} &= 2\gamma_2, \\ \frac{2\alpha_3 x_0}{p} - \frac{2\beta_3 y_0}{q} &= 2\gamma_3. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

имеет ранг два, т. е. векторы e'_1 , e'_2 , e'_3 компланарны.

Мы пришли к выводу, что искомой системы координат не существует.

516. Существует ли такая система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

517. Не приводя уравнения к каноническому виду и не вычисляя инвариантов, определить вид следующих поверхностей второго порядка:

а) $xy - x + z = 1$;

б) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + z = 0$;

в) $xy + xz + x + y + z = 0$;

г) $x^2 + 2xy + z^2 = 0$.

Указание. См. решение задачи 236.

Глава XIII

ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ¹

Литература: [1], часть II, § 38, 39; [2], глава XII, п. 242—246; [3], § 203, 204; [17], § 3, 4.

§ 43. Упрощение уравнения поверхности второго порядка путем параллельного переноса системы координат

С помощью преобразования параллельного переноса системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения поверхностей второго порядка:

$$518. x^2 - 6y^2 + 2z^2 - 2x + 12y + 4z + 9 = 0.$$

Решение. а) Сгруппируем члены левой части данного уравнения относительно x , y и z следующим образом:

$$(x^2 - 2x + 1) - 6(y^2 - 2y + 1) + 2(z^2 + 2z + 1) + \\ + 9 - 1 + 6 - 2 = 0,$$

$$\text{или } (x - 1)^2 - 6(y - 1)^2 + 2(z + 1)^2 + 12 = 0.$$

б) Введем обозначения:

$$x - 1 = x'; \quad y - 1 = y'; \quad z + 1 = z'.$$

Отсюда получаем формулы параллельного переноса системы координат в точку $O'(1, 1, -1)$:

$$x = x' + 1, \quad y = y' + 1, \quad z = z' + (-1).$$

¹ Во всех задачах этой главы система координат предполагается прямоугольной декартовой.

в) Уравнение данной поверхности относительно системы координат $O' x' y' z'$ имеет вид:

$$x'^2 - 6y'^2 + 2z'^2 + 12 = 0,$$

или

$$-\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение двуполостного гиперboloида.

519. $3x^2 - 2z^2 + 12x - 2y + 4z + 6 = 0.$

Решение. Задача решается аналогично предыдущей:

а) $3(x^2 + 4x + 1) - 2(z^2 - 2z + 1) - 2y + 6 - 12 + 2 = 0,$

или

$$3(x + 2)^2 - 2(z - 1)^2 - 2(y + 2) = 0.$$

б) Введем обозначения:

$$x' = x + 2, \quad y' = y + 2, \quad z' = z - 1.$$

Отсюда получаем формулы параллельного переноса системы координат в точку $O'(-2, -2, 1)$:

$$x = x' - 2, \quad y = y' - 2, \quad z = z' + 1.$$

в) В новой системе получаем каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z'^2}{\frac{1}{2}} = 2y'.$$

520. $y^2 + 2z^2 - 4y + 12z + 10 = 0.$

Решение. Задача решается аналогично предыдущим:

а) $(y^2 - 4y + 4) + 2(z^2 + 6z + 9) + 10 - 4 - 18 = 0,$
или $(y - 2)^2 + 2(z + 3)^2 - 12 = 0;$

б) $x' = x, \quad y' = y - 2, \quad z' = z + 3, \quad O'(0, 2, -3);$

в) в новой системе получаем каноническое уравнение эллиптической цилиндрической поверхности:

$$\frac{y'^2}{12} + \frac{z'^2}{6} = 1.$$

Остальные примеры решите самостоятельно.

$$521. 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x + 6y + 16z - 1 = 0.$$

$$522. x^2 + 2z^2 - 6x + 4y - 8z + 13 = 0.$$

$$523. 2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 12z + 2 = 0.$$

$$524. x^2 - 2z^2 + 6x + 4y - 4z + 3 = 0.$$

$$525. x^2 - y^2 + z^2 + 2x + 4y - 3 = 0.$$

$$526. x^2 - 3y^2 + 10x + 12y + 13 = 0.$$

$$527. 5x^2 + 10y^2 + 2z^2 - 40y + 50 = 0.$$

$$528. x^2 + 14x + 44 = 0.$$

§ 44. Упрощение уравнения поверхности второго порядка путем вращения системы координат

С помощью преобразования вращения системы координат вокруг начала привести к каноническому виду следующие уравнения поверхностей и написать формулы преобразования.

$$529. 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 36 = 0.$$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение данной поверхности:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Отсюда получаем:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Определим корни этого уравнения¹. Для этой цели разложим левую часть уравнения на линейные множители:

$$(\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = 0.$$

Отсюда: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 6$.

б) Относительно новой системы координат $Ox'y'z'$, единичные векторы $e'_k \{p_k^1, p_k^2, p_k^3\}$ которой имеют глав-

¹ Решение кубического уравнения представляет для студента первого курса определенную трудность. Обычно корни определяют разложением левой части уравнения на линейные множители. Иногда полезно воспользоваться следующей теоремой: уравнение $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ с целыми коэффициентами может иметь рациональными корнями только целые числа, которые являются делителями свободного члена a_3 (см. Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, 1949, § 32).

ные направления, данная поверхность определяется уравнением:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + a_{44} = 0,$$

или, в данном случае, $3x'^2 + 9y'^2 + 6z'^2 - 36 = 0$.

Отсюда, разделив на 36, получаем каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{6} = 1.$$

в) Чтобы написать формулы преобразования системы координат, найдем единичные векторы $e_1 \{p_1^1, p_1^2, p_1^3\}$, $e_2 \{p_2^1, p_2^2, p_2^3\}$, $e_3 \{p_3^1, p_3^2, p_3^3\}$, имеющие главные направления относительно данной поверхности.

Известно, что если λ_k — корень характеристического уравнения (1), то координаты вектора главного направления, соответствующего корню λ_k , определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_k) p_k^1 + a_{12} p_k^2 + a_{13} p_k^3 &= 0, \\ a_{21} p_k^1 + (a_{22} - \lambda_k) p_k^2 + a_{23} p_k^3 &= 0, \\ a_{31} p_k^1 + a_{32} p_k^2 + (a_{33} - \lambda_k) p_k^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При этом, если λ_k — однократный корень уравнения (1), то в системе (2) два уравнения независимы. Для данной поверхности при $\lambda_1 = 3$ уравнения (2) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 4p_1^1 - 2p_1^2 &= 0, \\ -2p_1^1 + 3p_1^2 - 2p_1^3 &= 0, \\ -2p_1^2 + 2p_1^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$p_1^1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} t = 4t, \quad p_1^2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} t = 8t, \\ p_1^3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} t = 8t^1.$$

¹ Первые два уравнения системы (3) могут быть интерпретированы следующим образом. Рассмотрим в прямоугольной декартовой

Подберем коэффициент t так, чтобы вектор $e'_1 \{p_1^1, p_1^2, p_1^3\}$ был единичным, т. е.

$$(p_1^1)^2 + (p_1^2)^2 + (p_1^3)^2 = 1 \text{ или } t^2 (4^2 + 8^2 + 8^2) = 1,$$

$$\text{отсюда } t = \pm \frac{1}{12}; e'_1 \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

Аналогично определяем единичные векторы главных направлений, соответствующих характеристическим числам: $\lambda_2 = 9$ и $\lambda_3 = 6$:

$$e'_2 \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}, e'_3 \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\}.$$

Искомые формулы поворота системы координат имеют вид:

$$x = p_1^1 x' + p_2^1 y' + p_3^1 z',$$

$$y = p_1^2 x' + p_2^2 y' + p_3^2 z',$$

$$z = p_1^3 x' + p_2^3 y' + p_3^3 z',$$

или

$$x = \frac{1}{3} x' + \frac{2}{3} y' + \frac{2}{3} z',$$

$$y = \frac{2}{3} x' - \frac{2}{3} y' + \frac{1}{3} z',$$

$$z = \frac{2}{3} x' + \frac{1}{3} y' - \frac{2}{3} z'.$$

$$530. 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 24 = 0.$$

Решение. а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0; -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 6.$$

системе векторы $a \{4, -2, 0\}$, $b \{-2, 3, -2\}$ и $e_1 \{p_1^1, p_1^2, p_1^3\}$. Тогда первые два уравнения системы (3) векторно записываются так: $ae_1 = 0$, $be_1 = 0$. Отсюда следует, что искомый вектор e_1 перпендикулярен как к вектору a , так и к вектору b , т. е. $e_1 \parallel (a \times b)$. Это означает, что координаты векторов e_1 и $a \times b$ пропорциональны.

б) Уравнение поверхности относительно новой системы координат $O'e'_1e'_2e'_3$ имеет вид:

$$6y'^2 + 6z'^2 - 24 = 0, \text{ или } y'^2 + z'^2 = 4.$$

Этим уравнением задается круговая цилиндрическая поверхность.

в) Найдем координаты единичных векторов $e_k \{p_k^1, p_k^2, p_k^3\}$, имеющих главные направления относительно данной поверхности второго порядка.

Единичный вектор главного направления, соответствующий корню $\lambda_1 = 0$, определяется точно так же, как и в предыдущем примере:

$$p_1^1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} t = 6t, \quad p_1^2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} t = 12t,$$

$$p_1^3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} t = 6t,$$

$$e'_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}.$$

Для определения единичных векторов главных направлений, соответствующих кратному характеристическому корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$, необходимо это значение, а также коэффициенты уравнения поверхности подставить в систему (2), стр. 194. В данном случае в системе (2) получим только одно независимое уравнение:

$$p_2^1 + 2p_2^2 + p_2^3 = 0.$$

Найдем какое-либо решение этого уравнения, например $\{1, 0, -1\}$. Тогда вектор e'_2 будет иметь координаты $e'_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. Вектор $e'_3 = e'_1 \times e'_2$ имеет также главное направление: $e'_3 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

Таким образом, формулы поворота координатной системы вокруг начала имеют вид:

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z',$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{6}} x' + \frac{1}{\sqrt{3}} z',$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{6}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' - \frac{1}{\sqrt{3}} z'.$$

$$531. 2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 15 = 0.$$

Решение. В уравнении поверхности содержится только один член с произведением переменных x и y . В этом случае целесообразно совершить поворот вокруг оси координат, одноименной с отсутствующей в произведении переменной; в данном случае вокруг оси Oz с таким расчетом, чтобы новые оси Ox' и Oy' имели главные направления. Так как ось Oz имеет главное направление (см. [18]), то все три новые оси Ox' , Oy' и Oz будут иметь главные направления.

Для осуществления этого плана рассмотрим на плоскости линию второго порядка, которая получается пересечением данной поверхности с плоскостью $z = 0$:

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy - 15 = 0. \quad (1)$$

Главные направления этой кривой будут одновременно главными направлениями исходной поверхности второго порядка¹, поэтому повернем систему координат вокруг оси Oz так, чтобы оси координат Ox' и Oy' имели главные направления относительно линии (1). Из общей теории линий 2-го порядка известно, что угол поворота α системы координат Oxy определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}}, \quad (2)$$

где λ — корень характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Формулы вращения исходной системы координат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \\ z &= z'. \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

¹ Это утверждение следует из того обстоятельства, что ось Oz имеет главное направление.

В данном случае, для кривой (1) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

По формуле (2) определяем α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1-2}{1} = -1; \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Соотношения (4) принимают вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y',$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y',$$

$$z = z'.$$

Теперь легко определить уравнение данной поверхности относительно системы координат $Ox'y'z'$. Для этого достаточно подставить значения x, y, z из предыдущих формул в левую часть уравнения поверхности:

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)^2 - 5z'^2 + \\ & + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'\right) - 15 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x'^2}{15} + \frac{y'^2}{5} - \frac{z'^2}{3} = 1.$$

$$532. \quad 3x^2 + 2y - 4z = 0.$$

Решение. Повернем систему координат вокруг оси Ox с таким расчетом, чтобы относительно новой системы координат уравнение поверхности не содержало переменной z' . Из общей теории известно, что в этом случае необходимо положить¹:

$$x = x', \quad y = \frac{a_{24}y' + a_{34}z'}{\sqrt{a_{24}^2 + a_{34}^2}}, \quad z = \frac{a_{34}y' - a_{24}z'}{\sqrt{a_{24}^2 + a_{34}^2}}.$$

¹ См. [18].

В данном случае:

$$x = x', \quad y = \frac{y' - 2z'}{\sqrt{5}}, \quad z = \frac{-2y' - z'}{\sqrt{5}}.$$

Уравнение поверхности относительно новой системы координат $Ox'y'z'$ имеет вид:

$$3x'^2 + 2\sqrt{5}y' = 0.$$

Отсюда следует, что данная поверхность является параболической цилиндрической поверхностью.

Остальные примеры решите самостоятельно.

533. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 12 = 0.$

534. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 24 = 0.$

535. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz - 6 = 0.$

536. $5x^2 + 5y^2 - 3z^2 + 8xy - 9 = 0.$

537. $5y^2 + 4x + 6z = 0.$

538. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xz - yz = 3.$

539. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 - 3xy - xz + yz - 6 = 0.$

540. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 4.$

§ 45. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

С помощью преобразований поворота системы координат вокруг начала и параллельного переноса привести к каноническому виду следующие уравнения поверхностей второго порядка.

541. $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4x + 8y + 12z - 4 = 0. \quad (1)$

Решение. Задача решается следующим образом. С помощью преобразования поворота системы координат вокруг начала добиваемся того, чтобы в новой системе $Ox'y'z'$ в уравнении поверхности отсутствовали члены с произведениями переменных $x'y'$, $x'z'$ и $y'z'$. При этом, очевидно, новые оси координат будут иметь главные направления. Далее, при помощи преобразования параллель-

ного переноса приводим уравнение поверхности к каноническому виду.

Осуществим этот план для данной поверхности (1).

а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0$$

или

$$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0.$$

Отсюда получаем: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 3$.

б) Найдем главные направления, соответствующие полученным характеристическим числам (см. задачу 529).

$$e_1' \{p_1^1, p_1^2, p_1^3\} \rightarrow \lambda_1 = 2,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_1^1 = 0; \quad p_1^2 = 2t_1; \quad p_1^3 = 2t_1;$$

$$e_1' \left\{ 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

$$e_2' \{p_2^1, p_2^2, p_2^3\} \rightarrow \lambda_2 = 6,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_2^1 = 4t_2, \quad p_2^2 = -2t_2, \quad p_2^3 = 2t_2;$$

$$e_2' \left\{ \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}.$$

$$e_3' \{p_3^1, p_3^2, p_3^3\} \rightarrow \lambda_3 = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad p_3^1 = t_3, \quad p_3^2 = t_3, \quad p_3^3 = -t_3;$$

$$e_3' \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

в) Найдем коэффициенты при членах первой степени в новой системе: a'_{l4} ($l = 1, 2, 3$).

Для этого запишем найденные результаты в следующую таблицу:

	$e_1' \rightarrow \lambda_1 = 2$	$e_2' \rightarrow \lambda_2 = 6$	$e_3' \rightarrow \lambda_3 = 3$
$a_{14} = 2$	$p_1^1 = 0$	$p_2^1 = \frac{2}{\sqrt{6}}$	$p_3^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_{24} = 4$	$p_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$p_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$	$p_3^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_{34} = 6$	$p_1^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$p_2^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$	$p_3^3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_{44} = -4$	$a_{14}' = 5\sqrt{2}$	$a_{24}' = \sqrt{6}$	$a_{34}' = 0$

В этой таблице элементы, стоящие во втором, третьем и четвертом столбцах, являются координатами векторов главных направлений e_1' , e_2' , e_3' .

Из общей теории поверхностей второго порядка известно, что

$$a_{l4}' = a_{14}p_l^1 + a_{24}p_l^2 + a_{34}p_l^3 \quad (l = 1, 2, 3).$$

Следовательно, коэффициент a_{l4}' равен сумме произведений соответствующих элементов первого и $(l+1)$ -го столбцов таблицы.

Уравнение данной поверхности в новой системе $Ox'y'z'$ в общем виде запишется так:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a_{14}'x' + 2a_{24}'y' + 2a_{34}'z' + a_{44}' = 0.$$

Подставив сюда найденные значения, получаем следующее уравнение:

$$2x'^2 + 6y'^2 + 3z'^2 + 10\sqrt{2}x' + 2\sqrt{6}y' - 4 = 0.$$

г) Приведем это уравнение к каноническому виду с помощью преобразования параллельного переноса начала координат (см. задачу 518):

$$2\left(x' + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 3z'^2 - 30 = 0.$$

Если ввести обозначения:

$$\tilde{x} = x' + \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{y} = y' + \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \tilde{z} = z',$$

то в новой системе $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ получаем каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{\tilde{x}^2}{15} + \frac{\tilde{y}^2}{5} + \frac{\tilde{z}^2}{10} = 1.$$

$$542. x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz + 8x + 4y - 5 = 0.$$

Решение. Задача решается по тому же плану, что и предыдущая.

а) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

б) Найдем главные направления, соответствующие полученным характеристическим числам (см. задачу 529):

$$\lambda_1 \rightarrow e_1' \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right\};$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \rightarrow e_2' \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\}; \quad e_3' \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

в) Для определения коэффициентов a_{i4}' ($i = 1, 2, 3$) составим таблицу:

	$e_1' \rightarrow \lambda_1 = 6$	$e_2' \rightarrow \lambda_2 = 0$	$e_3' \rightarrow \lambda_3 = 0$
$a_{14} = 4$	$p_1^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$	$p_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$p_3^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_{24} = 2$	$p_1^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$	$p_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$p_3^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_{34} = 0$	$p_1^3 = \frac{2}{\sqrt{6}}$	$p_2^3 = 0$	$p_3^3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$a_{44} = -5$	$a_{14}' = \sqrt{6}$	$a_{24}' = \sqrt{2}$	$a_{34}' = 2\sqrt{3}$

Уравнение поверхности относительно системы координат $Ox'y'z'$, оси которой имеют главные направления e_i' , имеет вид:

$$6x'^2 + 2\sqrt{6}x' + 2\sqrt{2}y' + 4\sqrt{3}z' - 5 = 0.$$

г) Совершим преобразование параллельного переноса:

$$6\left(x'^2 + 2\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{6}\right) + 2\sqrt{2}y' + 4\sqrt{3}z' - 6 = 0,$$

$$6\left(x' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 2\sqrt{2}y' + 2\sqrt{3}(z' - \sqrt{3}) = 0.$$

Если ввести обозначения:

$$\tilde{x} = x' + \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \tilde{y} = y', \quad \tilde{z} = z' - \sqrt{3},$$

то в новой системе с началом в точке $O' \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{3}\right)$ уравнение поверхности имеет вид:

$$6\tilde{x}^2 + 2\sqrt{2}\tilde{y} + 2\sqrt{3}\tilde{z} = 0.$$

д) Совершив снова преобразование поворота системы координат вокруг оси $O'\tilde{x}$ (см. задачу 532) по формулам:

$$\tilde{x} = \tilde{x}', \quad \tilde{y} = \frac{\sqrt{2}\tilde{y}' + \sqrt{3}\tilde{z}'}{\sqrt{5}}, \quad \tilde{z} = \frac{\sqrt{3}\tilde{y}' - \sqrt{2}\tilde{z}'}{\sqrt{5}},$$

получим уравнение параболической цилиндрической поверхности:

$$6\tilde{x}'^2 + 2\sqrt{5}\tilde{y}' = 0, \quad \text{или} \quad \tilde{x}'^2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}\tilde{y}'.$$

$$543. \quad 2xz + 4x - 6y + 8z - 2 = 0.$$

Решение. а) В уравнении содержится только один член с произведением переменных. Для того чтобы освободиться от него, повернем систему координат вокруг оси Oy так, чтобы оси Ox' и Oy' имели относительно линии

$$\begin{cases} 2xz + 4x + 8z - 2 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

главные направления. Так как коэффициенты при x^2 и z^2 равны, то, как известно из общей теории линий 2-го порядка, поворот вокруг осей Ox , Oz нужно совершать на $\rightarrow \alpha = 45^\circ$, т. е. формулы поворота системы координат $Oxyz$ будут иметь вид:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - z'), \quad y = y', \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z'),$$

а уравнение данной поверхности в новой системе:

$$x'^2 - z'^2 + 6\sqrt{2}x' - 6y' + 2\sqrt{2}z' - 2 = 0. \quad (1)$$

б) Совершим преобразование параллельного переноса. Для этого запишем уравнение (1) в виде:

$$(x'^2 + 6\sqrt{2}x' + 18) - (z'^2 - 2\sqrt{2}z' + 2) - 6y' - 18 = 0,$$

или

$$(x' + 3\sqrt{2})^2 - (z' - \sqrt{2})^2 - 6(y' + 3) = 0.$$

Перейдем к новой системе с началом в точке

$$O'(-3\sqrt{2}, -3, \sqrt{2}):$$

$$\tilde{x} = x' + 3\sqrt{2}, \quad \tilde{y} = y' + 3, \quad \tilde{z} = z' - \sqrt{2}.$$

В этой системе уравнение поверхности имеет вид:

$$\tilde{x}^2 - \tilde{z}^2 - 6\tilde{y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\tilde{x}^2}{3} - \frac{\tilde{z}^2}{3} = 2\tilde{y}$$

(гиперболический параболоид).

Остальные примеры решите самостоятельно.

544. $6x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 6z - 27 = 0.$

545. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 36x + 36y - 18z - 18 = 0.$

546. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$

547. $5y^2 - 2x + 10y - 4z + 1 = 0.$

548. $3x^2 + 2yz - 6x + 4y - 4z + 1 = 0.$

549. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 8xz + 4x - 6y + 8z + \frac{35}{3} = 0.$

Глава XIV

ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ОБЩЕМУ УРАВНЕНИЮ

§ 46. Составление уравнений поверхностей второго порядка¹

550. Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который проходит через точку $M(2, 0, 1)$ и пересекает плоскость Oxy по эллипсу: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$.

551. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси

$$x = 7 + 3t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 + 2t \quad (1)$$

и координаты одной из ее точек $M_0(2, -1, 0)$.

Решение. Все точки $M(x, y, z)$ круговой цилиндрической поверхности находятся на одинаковом расстоянии ρ от ее оси, где ρ —расстояние от точки $M_0(2, -1, 0)$ до прямой (1).

Как известно, $\rho = \frac{|\mathbf{p} \times \overline{M_0M_1}|}{|\mathbf{p}|}$, где M_0 —данная точка, M_1 —начальная точка, а \mathbf{p} —направляющий вектор прямой (1). Непосредственным подсчетом убеждаемся в том, что $\rho = 3$.

Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на круговой цилиндрической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы

¹ Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

$$\frac{|\overline{M_0 M} \times p|}{|p|} = 3.$$

Отсюда после элементарных подсчетов получаем уравнение искомой поверхности в виде:

$$20x^2 + 13y^2 + 25z^2 - 24xy - 12xz - 16yz - 220x + 190y - 50z + 641 = 0.$$

552. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности, если известны уравнения ее оси

$$x = t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -3 - 2t$$

и координаты одной из ее точек $M_0(1, -2, 1)$.

553. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $S(1, 2, 4)$, образующие которой составляют с плоскостью $2x + 2y + z = 0$ угол $\varphi = 45^\circ$.

Решение. Для того чтобы точки $M(x, y, z)$ лежали на конической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы вектор \overline{SM} составлял с нормальным вектором n данной плоскости угол $\Theta = 90^\circ - \varphi = 45^\circ$.

Так как

$$\overline{SM} \{x-1, y-2, z-4\} \text{ и } n \{2, 2, 1\},$$

то

$$\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2(x-1) + 2(y-2) + (z-4)}{3\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2}}.$$

Отсюда получаем уравнение искомой поверхности:

$$x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz + 62x + 44y - 32z - 11 = 0.$$

554. Составить уравнение круговой конической поверхности, вершина которой находится в точке $S(1, 2, 3)$, ось перпендикулярна к плоскости $2x + 2y - z + 1 = 0$, а образующие составляют с осью угол, равный 30° .

555. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Ox .

556. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы

$$\begin{cases} y^2 = 6x, \\ z = 0 \end{cases}$$

вокруг оси Ox .

557. Найти уравнение геометрического места точек, лежащих на всех прямых, параллельных плоскости Oxy и пересекающих две прямые

$$x = 0, \quad y = 0, \quad (1)$$

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 3t, \quad z = t. \quad (2)$$

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка искомого геометрического места, а $p \{p_1, p_2, p_3\}$ — направляющий вектор прямой l , параллельной плоскости Oxy , на которой лежит точка M . Так как $p \parallel Oxy$, то $p_3 = 0$. Принимая M за начальную точку прямой l , напомним ее уравнение:

$$X = x + p_1 t, \quad Y = y + p_2 t, \quad Z = z. \quad (3)$$

Прямая (3) пересекает как прямую (1), так и прямую (2), поэтому

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Мы получили систему уравнений относительно p_1 и p_2 :

$$\left. \begin{aligned} yp_1 - xp_2 &= 0, \\ (y - 3z - 2)p_1 + (-x + 2z + 1)p_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

Так как p_1 и p_2 одновременно не равны нулю, то

$$\begin{vmatrix} y & -x \\ y - 3z - 2 & -x + 2z + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

или, в развернутом виде:

$$3xz - 2yz + 2x - y = 0. \quad (6)$$

Мы показали, что если точка $M(x, y, z)$ принадлежит геометрическому месту, то ее координаты удовлетворяют уравнению (6). Теперь докажем обратное предположение. Пусть координаты некоторой точки $M(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению (6). Покажем, что эта точка принадлежит геометрическому месту. Мы должны доказать, что существует такая прямая l , которая проходит через

точку M , пересекает прямые (1), (2) и параллельна плоскости Oxy .

Для этого подставим координаты точки M в уравнение (4') и определим ненулевые числа p_1, p_2 , удовлетворяющие системе (4'). Такое решение системы существует, так как координаты точки M удовлетворяют уравнению (6) или уравнению (5).

Рассмотрим прямую l , проходящую через M и параллельную вектору $\{p_1, p_2, 0\}$. Очевидно, l пересекает прямые (1), (2), так как условия (4') или (4) являются условиями пересечения прямой l с прямыми (1), (2).

Мы показали, что соотношение (6) есть уравнение искомого геометрического места точек. Нетрудно показать, что уравнением (6) задается гиперболический параболоид.

558. Найти уравнение геометрического места точек, лежащих на всех прямых, параллельных плоскости Oxy и пересекающих прямые

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

§ 47. Пересечение поверхности с прямой; асимптотические направления

Литература: [1], часть II, § 42, 43; [2], глава XII, п. 247—251; [3], § 208.

559. Определить точки пересечения поверхности второго порядка

$$x^2 - 2xy + 2z^2 + xz - x - y = 0$$

с прямой

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-3}{4}.$$

У к а з а н и е. Перейти к параметрическому уравнению прямой.

560. Дана поверхность второго порядка:

$$x^2 - 3xy + xz + y^2 - x - 2y + 1 = 0.$$

Выяснить, какие из векторов $a\{1, 0, 0\}$, $b\{2, 2, 2\}$, $c\{1, 2, 0\}$, $d\{0, 0, 5\}$ имеют асимптотические направления по отношению к данной поверхности.

561. Найти те прямолинейные образующие поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

которые проходят через точку $(1, 1, 1)$.

Решение. Если $\rho \{\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор искомой прямолинейной образующей, то параметрические уравнения этой образующей запишутся так:

$$x = 1 + \alpha t, \quad y = 1 + \beta t, \quad z = 1 + \gamma t. \quad (1)$$

Подставив эти значения в уравнение поверхности, после элементарных преобразований получаем:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) t^2 + 2(\alpha + \beta - \gamma) t = 0.$$

Прямая l будет в том и только в том случае прямолинейной образующей, если

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0, \quad \alpha + \beta - \gamma = 0.$$

Заметим, что $\gamma \neq 0$, так как в противном случае из первого соотношения получаем: $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Разделив соотношение (2) на γ и вводя новые неизвестные $\frac{\alpha}{\gamma} = \xi$, $\frac{\beta}{\gamma} = \eta$, получаем:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi + \eta = 1.$$

Из этих двух уравнений легко получить значения ξ и η :

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 1; \quad \xi_2 = 1, \quad \eta_2 = 0.$$

Положив $\gamma = 1$, получаем координаты двух направляющих векторов прямолинейных образующих:

$$\rho_1 \{0, 1, 1\}, \quad \rho_2 \{1, 0, 1\}.$$

Из соотношений (1) получаем параметрические уравнения прямолинейных образующих:

$$\begin{aligned} x &= 1, & y &= 1 + t, & z &= 1 + t; \\ x &= 1 + t, & y &= 1, & z &= 1 + t, \end{aligned}$$

Подставив значения x , y и z в исходное уравнение поверхности, убеждаемся в том, что оно превращается в тождество относительно t .

562. Найти те прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - yz + 4x + 3y - 5z + 4 = 0$, которые проходят через точку $(-1, -1, 1)$.

563. Найти условие, при котором для данной поверхности $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ (1)

все направления, параллельные плоскости Oxy , являются асимптотическими.

Решение. Для того чтобы вектор $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$ имел асимптотическое направление относительно поверхности (1), необходимо и достаточно, чтобы

$$P = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma = 0.$$

Если p параллелен плоскости Oxy , то $\gamma = 0$, поэтому условие асимптотичности этого вектора имеет вид:

$$a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\alpha\beta = 0. \quad (2)$$

Так как любой вектор, параллельный плоскости, имеет асимптотическое направление, то уравнение (2) есть тождество относительно α и β . Это возможно тогда и только тогда, когда

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{12} = 0. \quad (3)$$

Мы показали, что если любой вектор, параллельный плоскости Oxy , имеет асимптотическое направление относительно поверхности (1), то выполняются условия (3). Обратное утверждение очевидно. В самом деле, если выполняются соотношения (3), то условие асимптотичности вектора принимает вид:

$$P = a_{33}\gamma^2 + 2a_{13}x\gamma + 2a_{23}\beta\gamma = 0.$$

Этому условию удовлетворяют координаты любого вектора, параллельного плоскости Oxy .

564. Ответьте на следующие вопросы:

а) Существует ли такая поверхность, для которой всякое направление является асимптотическим? Объясните результат.

б) При каком условии все прямые, параллельные оси Ox , являются асимптотами или прямолинейными образующими?

565. Пусть поверхность задана уравнением:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Найти условие того, чтобы эта поверхность:

а) имела только одно асимптотическое направление, совпадающее с направлением оси Ox ;

б) не имела асимптотических направлений.

566. Найти конус асимптотических направлений для пары пересекающихся плоскостей.

Решение. *Конусом асимптотических направлений* данной поверхности называется коническая поверхность с вершиной в любой точке пространства, все образующие которой имеют асимптотическое направление.

Если поверхность дана уравнением (1) (задача 563), то конус асимптотических направлений с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0) имеет уравнение:

$$\begin{aligned} & a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 + \\ & + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{13}(x - x_0)(z - z_0) + \\ & + 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Обычно конус асимптотических направлений рассматривают с вершиной в начале координат.

Каноническое уравнение пары пересекающихся плоскостей имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad (1)$$

поэтому конус асимптотических направлений с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0) имеет уравнение:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0. \quad (2)$$

Если за вершину конуса возьмем начало координат или любую точку, лежащую на линии пересечения плоскостей (1), то уравнение (2) совпадает с уравнением (1).

Мы пришли к выводу: если за вершину конуса асимптотических направлений пары пересекающихся плоскостей взять точку на линии пересечения данных плоскостей, то конус асимптотических направлений совпадает с данной поверхностью.

567. Найти конус асимптотических направлений следующих поверхностей второго порядка:

- а) пары параллельных плоскостей;
- б) гиперболического параболоида;
- в) эллиптического параболоида.

§ 48. Центр поверхности

Л и т е р а т у р а: [1], часть II, § 44; [2], глава XII, п. 261; [3], § 179, 183, 190, 193, 207; [17], § 10.

568. Найти центр поверхности второго порядка

$$2x^2 + 12y^2 + 4z^2 + 8xy - 4xz + 12yz - 10x + 14z + 7 = 0.$$

Р е ш е н и е. Если поверхность второго порядка задана общим уравнением:

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (1)$$

то, для того чтобы точка $C(x_0, y_0, z_0)$ являлась центром этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F'_{x_0} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0, \\ F'_{y_0} &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0, \\ F'_{z_0} &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Составим эту систему для данной поверхности:

$$\begin{aligned} 2x_0 + 4y_0 - 2z_0 - 5 &= 0, & 4x_0 + 12y_0 + 6z_0 &= 0, \\ & & -2x_0 + 6y_0 + 4z_0 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Так как определитель этой системы не равен нулю, то она имеет единственное решение:

$$x_0 = \frac{3}{2}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = -1.$$

569. Найти центр следующих поверхностей:

- а) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0$;
- б) $3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0$.

570. Найти геометрическое место центров и определить тип каждой из следующих поверхностей¹:

- а) $9x^2 + 5y^2 + 9z^2 - 12xy - 6yz + 12y - 36z = 0$;
- б) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y - 8z - 1 = 0$;
- в) $x^2 + 4y^2 + 4xz - 2yz = 0$;

¹ См. [1], часть II, § 44.

$$г) 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz - 4yz + 5x + 5y - 5z + 2 = 0.$$

В случае, когда поверхность, заданная общим уравнением, имеет центр, задача приведения ее уравнения к каноническому виду может быть выполнена более просто, чем это было сделано в предыдущем параграфе.

571. Привести к каноническому виду уравнение центральной поверхности второго порядка:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0.$$

Решение. Если поверхность второго порядка, заданная уравнением (1) (задача 568), имеет центр (x_0, y_0, z_0) , то, выполнив преобразование переноса начала координат в центр, получим следующее уравнение:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Если, далее, совершить поворот системы координат вокруг центра так, чтобы оси новой системы имели главные направления, то получим уравнение поверхности в виде:

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 + \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Оно называется *приведенным* уравнением поверхности второго порядка. Если $\Phi(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то, разделив предыдущее уравнение на $\Phi(x_0, y_0, z_0)$, получаем каноническое уравнение поверхности.

Осуществим этот план для данной поверхности.

а) Подставив значения коэффициентов в уравнения (2) задачи 568, получаем следующие значения координат центра поверхности: $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = -1$.

б) Вычислим корни характеристического уравнения поверхности:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2 - \lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 6$.

в) Напишем приведенное уравнение поверхности:

$$-3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 + 6\tilde{z}^2 = 0.$$

Мы получили каноническое уравнение конической поверхности.

572. Привести к каноническому виду уравнения следующих центральных поверхностей:

$$а) x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z - 3 = 0;$$

$$б) x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0.$$

573. Поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$. При каком условии плоскость Oxy является плоскостью центров этой поверхности?

Решение. Пусть для поверхности $F(x, y, z) = 0$ плоскость

$$z = 0 \quad (1)$$

является плоскостью центров. Это означает, что всякое решение уравнения (1) является решением системы:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и наоборот.

Возьмем точки $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (1). Подставив координаты этих точек в систему (2), получаем:

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{22} = a_{32} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0.$$

Следовательно, если плоскость Oxy является плоскостью центров для данной поверхности, то ее уравнение имеет вид:

$$2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + a_{44} = 0. \quad (3)$$

Обратное утверждение очевидно.

574. Поверхность задана уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$. При каком условии ось Ox является линией центров для данной поверхности?

§ 49. Диаметральные плоскости

Литература: [1], часть II, § 45, 46; [2], глава XII, п. 260, 261, 262; [3], § 208; [17], § 13.

575. Найти уравнение диаметральной плоскости поверхности

$$x^2 - y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz - 6yz - 2x + 4y - 5 = 0,$$

сопряженной направлению прямой:

$$\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Пусть поверхность задана уравнением:

$$F(x, y, z) = 0$$

и вектор $\mathbf{p} \{p_1, p_2, p_3\}$ не имеет асимптотического направления относительно данной поверхности, т. е.

$$P = a_{11}p_1^2 + a_{22}p_2^2 + a_{33}p_3^2 + 2a_{13}p_1p_3 + 2a_{23}p_2p_3 + 2a_{12}p_1p_2 \neq 0. \quad (2)$$

Диаметральная плоскость, сопряженная вектору \mathbf{p} , имеет уравнение:

$$F'_x(x, y, z) \cdot p_1 + F'_y(x, y, z) \cdot p_2 + F'_z(x, y, z) \cdot p_3 = 0^1. \quad (3)$$

Таким образом, для решения данной задачи достаточно знать координаты направляющего вектора прямой (1). Как известно, направляющий вектор прямой имеет координаты (см. задачу 417):

$$\mathbf{p} \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Для данной прямой $\mathbf{p} \{3, 3, 3\}$.

Подставив значения коэффициентов уравнения поверхности и координаты вектора \mathbf{p} в соотношение (1), после элементарных преобразований получаем: $6y - 1 = 0$.

576. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности

$$6x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy - 4xz - 2y - 3 = 0,$$

которая параллельна плоскости

$$x + 3y - z + 5 = 0. \quad (1)$$

¹ Относительно обозначений см. § 48, задачу 568.

Решение. Найдем координаты вектора $\mathbf{a} \{a_1, a_2, a_3\}$, сопряженного искомой диаметральной плоскости

$$\frac{a_{11} a_1 + a_{12} a_2 + a_{13} a_3}{A} = \frac{a_{21} a_1 + a_{22} a_2 + a_{23} a_3}{B} = \frac{a_{31} a_1 + a_{32} a_2 + a_{33} a_3}{C}.$$

Для данной задачи получаем:

$$\frac{6a_1 + 3a_2 - 2a_3}{1} = \frac{3a_1 + 9a_2}{3} = \frac{-2a_1 + a_3}{-1}.$$

Отсюда: $\mathbf{a} \{2; -1; 5\}$.

Напишем уравнение диаметральной плоскости, сопряженной вектору \mathbf{a} :

$$x + 3y - z - 1 = 0.$$

577. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 4xz - 5 = 0$, которая проходит через прямую

$$x = 1 - 3t, \quad y = 2t, \quad z = 2 - t.$$

Решение. Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -6 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то поверхность имеет единственный центр M_0 , который принадлежит всем диаметральной плоскостям. Таким образом, задача сводится к определению плоскости, проходящей через данную прямую и точку M_0 .

Точка M_0 имеет координаты $(0, 0, 0)$, поэтому искомая плоскость параллельна векторам $\mathbf{a} \{1, 0, 2\}$ и $\mathbf{b} \{-3, 2, -1\}$. Уравнение искомой плоскости запишется в виде

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 4x + 5y - 2z = 0.$$

578. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности

$$2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0,$$

которая проходит через прямую

$$x = 1 + t, \quad y = -1 - t, \quad z = t.$$

579. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 2yz + 2xz - 4x - 1 = 0,$$

которая проходит через точки $O(0, 0, 0)$ и $M(1, 1, 0)$.

580. Найти общую диаметральную плоскость следующих трех поверхностей:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4xz + 6yz - 8x + 10y = 0,$$

$$3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 6xz - 2yz + 2x - 6y - 2z = 0.$$

581. Найти общую диаметральную плоскость поверхностей:

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0,$$

$$x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy - 6xz + 2yz + 8x - 16y + 1 = 0.$$

582. Составить уравнение диаметральной плоскости поверхности

$$x^2 - xy + 2yz + x - z = 0,$$

проходящей через точку $(1, 1, 1)$ и сопряженной направлению вектора \mathbf{a} , параллельного плоскости Oxy .

583. Ответьте на следующие вопросы:

а) При каком условии плоскость Oxy является одной из диаметральных плоскостей поверхности второго порядка?

б) Существует ли такая поверхность второго порядка, для которой все диаметральные плоскости совпадают?

в) Как расположены диаметральные плоскости для пары пересекающихся плоскостей?

Решение. а) Диаметральная плоскость поверхности второго порядка задается уравнением:

$$(a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)y + \\ + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)z + (a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma) = 0.$$

Задача сводится к тому, чтобы подобрать такие α , β , γ , для которых

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma &= 0, \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma &= 0, \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma &\neq 0, \\ a_{14}\alpha + a_{24}\beta + a_{34}\gamma &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем

$$P = (a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma)\alpha + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma)\beta + \\ + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)\gamma \neq 0.$$

Последнее условие означает, что вектор $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ не имеет асимптотического направления.

Из соотношений (1) следует, что условие $P \neq 0$ равносильно условию $\gamma \neq 0$.

Разделив уравнения (1) на γ и обозначив $\frac{\alpha}{\gamma} = p$, $\frac{\beta}{\gamma} = q$, получаем:

$$a_{11}p + a_{21}q + a_{31} = 0, \quad (2)$$

$$a_{12}p + a_{22}q + a_{32} = 0, \quad (3)$$

$$a_{14}p + a_{24}q + a_{34} = 0, \quad (4)$$

$$a_{13}p + a_{23}q + a_{33} \neq 0. \quad (5)$$

Таким образом, плоскость Oxy является одной из диаметральных плоскостей тогда и только тогда, когда существует такое число $A \neq 0$, что система

$$\begin{aligned} a_{11}p + a_{21}q + a_{31} &= 0, & a_{21}p + a_{22}q + a_{32} &= 0, \\ a_{14}p + a_{24}q + a_{34} &= 0, & a_{13}p + a_{23}q + a_{33} - A &= 0 \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно решение, т. е. совместна.

Мы пришли к следующему выводу: для того чтобы плоскость Oxy была одной из диаметральных плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $A \neq 0$, что ранги матриц

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{14} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - A \end{pmatrix}$$

совпадали.

На вопросы б) и в) ответьте самостоятельно.

§ 50. Главные направления; главные диаметральные плоскости¹

Литература: [1], часть II, § 45; [2], глава XII, п. 260, 261, 262; [3], § 208; [17], § 14, 15.

584. Доказать теорему: для того чтобы вектор $\rho \{p_1, p_2, p_3\}$ имел одновременно и главное и асимптотическое направление, необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли уравнениям:

$$\begin{aligned} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3 &= 0, \\ a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + a_{23} p_3 &= 0, \\ a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + a_{33} p_3 &= 0. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Доказательство проводится точно так же, как и доказательство аналогичной теоремы на плоскости (см. задачу 293).

Из этой теоремы непосредственно следует, что вектор главного направления, соответствующий характеристическому числу $\lambda = 0$, имеет асимптотическое направление и наоборот.

Таким образом, те и только те векторы главного направления имеют асимптотическое направление, которые соответствуют характеристическому числу $\lambda = 0$. Этот факт играет существенную роль при определении главных диаметральных плоскостей (см. задачу 587 в).

585. Ответьте на следующие вопросы:

а) При каком условии для данной поверхности второго порядка всякое направление является главным?

б) При каком условии координатная ось Ox имеет главное направление?

в) При каком условии любой вектор, параллельный плоскости Oxy , имеет главное направление?

Решение. а) Для того чтобы вектор $\rho \{p_1, p_2, p_3\}$ имел главное направление, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ , при котором

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) p_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3 &= 0, \\ a_{21} p_1 + (a_{22} - \lambda) p_2 + a_{23} p_3 &= 0, \\ a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + (a_{33} - \lambda) p_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В условии задачи требуется, чтобы для любого вектора

¹ Во всех задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

$p\{p_1, p_2, p_3\}$ существовало такое число λ , при котором выполнялись бы условия (1).

Подставив значения $p_1 = 1, p_2 = p_3 = 0$, получаем: $a_{21} = a_{31} = 0$. Аналогично, подставив значения $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0$, получаем: $a_{32} = 0$. Таким образом, система (1) принимает вид:

$$(a_{11} - \lambda) p_1 = 0, (a_{22} - \lambda) p_2 = 0, (a_{33} - \lambda) p_3 = 0.$$

Так как вектор $p\{1, 1, 1\}$ является вектором главного направления, то существует λ_1 , при котором

$$(a_{11} - \lambda_1) 1 = 0, (a_{22} - \lambda_1) 1 = 0, (a_{33} - \lambda_1) 1 = 0,$$

откуда $a_{11} = a_{22} = a_{33}$.

Итак, если для данной поверхности всякое направление является главным, то $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ и $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Обратное утверждение очевидно. Эти условия означают, что поверхность представляет собой сферу (комплексного, нулевого или действительного радиуса).

На вопросы б) и в) ответьте самостоятельно.

586. Найти уравнения главных диаметральных плоскостей и осей следующих поверхностей второго порядка:

$$\text{а) } x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 6xz + 6yz - 4x + 4y - 2z - 12 = 0;$$

$$\text{б) } 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy + 4xz + 2yz + 2x + 6y + 2z = 0.$$

Решение. а) Главные диаметральные плоскости соответствуют векторам главного, но не асимптотического направления, т. е. тем векторам главного направления, которые соответствуют ненулевым характеристическим числам (см. задачу 584). Отсюда вытекает следующий план решения задачи.

1. Определим характеристические числа:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1 - \lambda & 3 \\ -3 & 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -3.$$

Так как все характеристические числа отличны от нуля, то соответствующие им главные направления a_1, a_2, a_3 являются не асимптотическими относительно данной поверхности и для каждого из этих направлений существует сопряженная диаметрально плоскость.

2. Определим главные направления, соответствующие найденным характеристическим числам:

$$a_1 \rightarrow \lambda_1 = 2; \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_1 \{1, 1, 0\},$$

$$a_2 \rightarrow \lambda_2 = 6; \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad a_2 \{-1, 1, 2\},$$

$$a_3 \rightarrow \lambda_3 = -3; \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad a_3 \{1, -1, 1\}.$$

3. Найдем уравнения диаметральных плоскостей, сопряженных главным направлениям a_1, a_2, a_3 . Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной направлению вектора $a \{a_1; a_2; a_3\}$, для данной в задаче поверхности имеет вид:

$$(a_1 + a_2 - 3a_3)x + (a_1 + a_2 + 3a_3)y + 3(-a_1 + a_2 + a_3)z + (-2a_1 + 2a_2 - a_3) = 0$$

или в данном случае

$$x + y = 0, \quad 3x - 3y - 6z - 1 = 0, \quad 3x - 3y + 3z + 5 = 0.$$

4. Так как ось поверхности есть линия пересечения двух главных диаметральные плоскостей, то уравнения осей будут иметь вид:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - 3y - 6z - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 3y - 6z - 1 = 0, \\ 3x - 3y + 3z + 5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 3y + 3z + 5 = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

б) Задача решается аналогично предыдущей.

1. Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 0.$$

2. Так как $\lambda_3 = 0$, то соответствующее ему направление a_3 является асимптотическим относительно данной поверхности и не существует главной диаметральной плоскости, сопряженной вектору a_3 .

Найдем главные направления a_1 и a_2 :

$$a_1 \rightarrow \lambda_1 = 5; \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_1 \{1, 1, 1\},$$

$$a_2 \rightarrow \lambda_2 = 2; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_2 \{-1, 2, -1\}.$$

3. Напишем уравнения диаметральных плоскостей, сопряженных главным направлениям a_1, a_2 :

$$x + y + z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - 4y + 2z - 1 = 0.$$

4. Определим уравнения оси:

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

587. Найти уравнения главных диаметральных плоскостей и осей следующих поверхностей второго порядка:

- а) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 4x +$
 $+ 6y + 2z - 8 = 0;$
 б) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 8y + 6z - 10 = 0;$
 в) $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 6x +$
 $+ 6y - 7 = 0.$

ОТВЕТЫ

8. Если векторы a и b не коллинеарны, то данное в условии равенство означает, что диагонали параллелограмма, построенного на данных векторах, имеют равные длины. Этим свойством характеризуется прямоугольник, поэтому векторы a и b взаимно перпендикулярны. Если хотя бы один из векторов a и b равен нулю, то условие задачи всегда выполнено. Если, наконец, a и b ненулевые коллинеарные векторы, то $|a + b| \neq |a - b|$.

26. $k = \frac{3}{4}$. 33. а) $\overline{CM}\{-1, 1\}$; $\overline{OB}\{-1, -2\}$; $\overline{KM}\{-1, -1\}$; $\overline{CB}\{-2, -2\}$; $\overline{NC}\{1, 1\}$; $\overline{AN}\{-1, -5\}$.

б) $\overline{CM}\{2, 1\}$; $\overline{OB}\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$; $\overline{KM}\{-1, 1\}$; $\overline{CB}\{-2, 2\}$; $\overline{NC}\{1, -1\}$; $\overline{AN}\{1, 1\}$.

34. $\overline{BC} = -\frac{b}{a}e_1 + e_2$, $\overline{AC} = \frac{a-b}{a}e_1 + e_2$, $\overline{BD} = -e_1 + e_2$.

38. $u = 2v + w$; $v = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w$; $w = u - 2v$.

39. $p = 2u - 3v$. 40. $a = -2$. 41. а) $a = 0$, б) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, в) при любом a векторы p и q не коллинеарны. 44. Так как $a \parallel c$ и $a + b + c - d = 0$, то трапеция $ABCD$ существует. 51. $A(-5, 0)$; $B(-5 + 2\sqrt{3}, 2)$; $C(5 - 2\sqrt{3}, 2)$; $D(5, 0)$; $M\left(0, \frac{5(5 + \sqrt{3})}{22}\right)$; $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

52. $A(0, 0)$; $B(0, 1)$; $C\left(\frac{5 - 2\sqrt{3}}{5}, 1\right)$; $D(1, 0)$; $M\left(\frac{5 - 2\sqrt{3}}{10 - 2\sqrt{3}}, \frac{5}{10 - 2\sqrt{3}}\right)$; $N\left(0, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$.

57. $A'(2, -5)$; $B'(0, -1)$; $C'(3, 1)$. 58. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $(-4, 1)$; $\left(1, \frac{8}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

59. Имеются две точки, удовлетворяющие условию задачи: $C_1(-3, -5)$ и $C_2(3, -6)$. 60. $A_1\left(3, \frac{13}{3}\right)$; $A_3\left(1, \frac{17}{3}\right)$; $A_4\left(0, \frac{19}{3}\right)$; $A_6\left(-2, \frac{23}{3}\right)$. $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$; $\lambda_3 = \frac{1}{2}$; $\lambda_4 = 2$; $\lambda_6 = -4$.

64. $A(1, -3); B(3, 4); C(7, -2)$. 65. $\sqrt{10}; 4; 5; 2\sqrt{5}$. 66. $4\sqrt{2}$.
 67. $(\sqrt{5}, 2); (-\sqrt{5}, 2); (2\sqrt{2}, -1); (-2\sqrt{2}, -1); (0, 3);$
 $(\sqrt{7}, \sqrt{2}); (-\sqrt{7}, \sqrt{2})$. 69. $\frac{\sqrt{157}}{2}$. 72. Задача имеет два ре-

шения: $C_1(-20, 20), r_1 = 20; C_2(-4, 4), r_2 = 4$. 74. $2\rho = 15 + 5\sqrt{5}; S = 25$. 78. Если обозначить через M_1', M_2', M_3', M_4' точки, симметричные данным по отношению к полюсу, а через $M_1'', M_2'', M_3'',$

M_4'' — по отношению к полярной оси, то $M_1' \left(2, -\frac{3\pi}{4} \right);$

$M_2' \left(3, -\frac{2\pi}{3} \right); M_3' \left(1, -\frac{3\pi}{4} \right); M_4' \left(3, \frac{2\pi}{3} \right); M_1'' \left(2, -\frac{\pi}{4} \right);$

$M_2'' \left(3, -\frac{\pi}{3} \right); M_3'' \left(1, -\frac{\pi}{4} \right); M_4'' \left(3, \frac{\pi}{3} \right)$. 81. $S = \frac{1}{2} \rho_1 \rho_2 |\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|;$

$S = 1$. 83. $AB = BC = 7$. 84. а), б) — на окружностях с

центрами в полюсе и радиусами, соответственно равными 3 и 5;

в), г) — на лучах, исходящих из полюса и образующих с полярной

осью углы 60° и 45° ; д) — на прямой, перпендикулярной к полярной

оси и пересекающей ее в точке $(5, 0)$; е) — на прямой, параллель-

ной полярной оси и отстоящей от полюса на расстоянии $\rho = 3$;

95. г) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$; д) $x^2 + y^2 \leq 8, x \geq 2$, или $x^2 + y^2 \leq 8,$

$x \leq -2$, или $x^2 + y^2 \leq 8, y \geq 2$, или $x^2 + y^2 \leq 8, y \leq -2$. Фигура

представляет собой геометрическое место точек, координаты которых

удовлетворяют хотя бы одному из перечисленных условий; е) $x \leq y,$

$x^2 + y^2 \leq 9$. 97. Пусть h — расстояние между параллельными пря-

мыми, а α — данное число. Возможны три случая: а) $\alpha < h$; иско-

мое г. м. т. не существует; б) $\alpha = h$ искомое г. м. т. представляет со-

бой совокупность всех точек, расположенных на заданных прямых

и в полосе между ними; в) $\alpha > h$; искомое г. м. т. представляет

собой пару прямых l_1 и l_2 , параллельных данным. Прямые l_1 и l_2

расположены симметрично относительно данных прямых; расстояние

между ними равно α . 98. Прямые, соединяющие середины противо-

положных сторон. 99. а) биссектриса первого и третьего координат-

ных углов; б) две прямые, параллельные оси Oy ; в) прямая, парал-

лельная оси Ox ; г) две прямые: ось абсцисс и биссектриса второго

и четвертого координатных углов; д) биссектрисы координатных

углов; е) прямая, параллельная оси Oy ; ж) пара прямых: ось абсцисс

и прямая, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(1, 2)$. 101. а), б) — не

совпадают; в) — совпадают. 103. а) окружность с центром в полюсе,

радиуса 4; б) прямая, перпендикулярная к полярной оси и проходя-

щая через точку $\rho = 2, \varphi = 0$; в) окружность радиуса 5 с центром

в точке $C(0, 5)$; г) луч, исходящий из полюса и образующий с по-

лярной осью угол $\frac{\pi}{4}$; д) прямая, параллельная полярной оси и про-

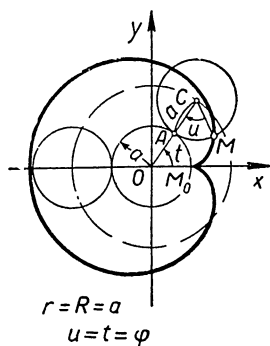
ходящая через точку $\left(1, \frac{\pi}{2} \right)$; е) два луча, исходящие из полюса

и образующие с полярной осью углы $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; ж) прямая, проходя-

щая через полюс и образующая с полярной осью угол $\frac{\pi}{4}$.

105. а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; $C(1, -2)$, $r=5$; д) $(x-1)^2 + y^2 = 1$; $C(1, 0)$, $r=1$; ж) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$; $C(2, 1)$, $r=2$. Остальные уравнения не определяют окружность. 107. Пусть $AB = 2a$, а a^2 — данная сумма квадратов. а) $a^2 > 2a^2$.

Искомое г. м. т. есть окружность с центром в середине отрезка AB ; б) $a^2 = 2a^2$. Искомое г. м. т. представляет собой точку — середину отрезка AB ; в) $a^2 < 2a^2$. На плоскости не существует ни одной точки, удовлетворяющей условию задачи. 108. Окружность, центр которой совпадает с центром тяжести треугольника ABC . 109. Окружность, концентрическая данной окружности. 110. Окружность, построенная на диаметре AB . 112. Две окружности. 113. Окружность, концентрическая данной окружности. 115.



Черт. 52.

$$x = (R+r) \cos \varphi - r \cos \frac{R+r}{r} \varphi,$$

$$y = (R+r) \sin \varphi - r \sin \frac{R+r}{r} \varphi.$$

Кардиоида изображена на чертеже 52. 116. $x = (R-r) \cos \varphi + r \cos \frac{R-r}{r} \varphi$, $y = (R-r) \sin \varphi - r \sin \frac{R-r}{r} \varphi$. Астроида изображена на чертеже 53. 118. $\rho = 2r \cos \varphi + b$. В прямоугольной декартовой системе: $(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = b^2(x^2 + y^2)$. 120. $\rho = a \varphi$, где

$a = \frac{v}{\omega}$. Кривая изображена на чертеже 54. 125. а) $4x - 3y + 7 = 0$;

б) $5x - 2y = 0$; в) $x + y + 4 = 0$; г) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$; д) $y - 5 = 0$;

е) $x + 1 = 0$; ж) $x - 3y - 16 = 0$; з) $x + y - 4 = 0$. 126. а) и в).

128. а) $3x - y - 8 = 0$; б) $y + 5 = 0$; в) $2x + y + 7 = 0$;

г) $x + y - 15 = 0$; д) $3x + 2y = 0$. 129. $p \{5, 2\}$; $n \{2, -5\}$;

$k = \frac{2}{5}$; $a = -\frac{3}{2}$; $b = \frac{3}{5}$; 130. $2x - 4y - 21 = 0$. 131. а) $x - 1 = 0$;

$2x - 3y + 8 = 0$; $2x + 3y - 12 = 0$; б) $y - 5 = 0$; $3x + 2y - 1 = 0$;

$3x - 2y - 5 = 0$. 132. $3x + 4y - 17 = 0$; $3x - 4y - 1 = 0$; $2x - 5y + 27 = 0$. 134. $(AB) y = 0$; $(BC) \sqrt{3}x - y - a\sqrt{3} = 0$; $(CD) \sqrt{3}x + y - 2a\sqrt{3} = 0$; $(DE) y - a\sqrt{3} = 0$; $(EF) \sqrt{3}x - y + a\sqrt{3} = 0$;

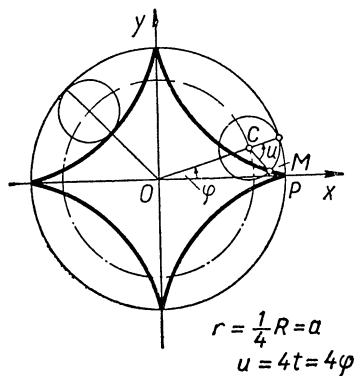
$(AF) y + \sqrt{3}x = 0$. 136. $AB \parallel CD$; $3x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$;

$y - 1 = 0$. 137. $x - y - 7 = 0$; $x - 2y - 10 = 0$. 138. а) $13x - 9y + 7 = 0$; б) $36x - 23y + 29 = 0$; в) $4x + 3y - 19 = 0$. 141. а) Пересекаются; б) параллельны; в) параллельны; г) совпадают. 142. $t_1 =$

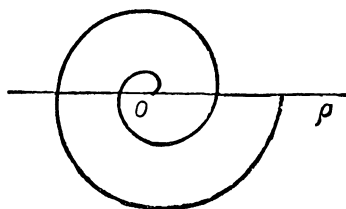
$-\frac{2}{3}$, $t_2 = 2$. 144. $3\lambda + 7\mu + 3 = 0$. 145. $x + y - 7 = 0$. 146. $2x +$

$+ y - 4 = 0$. 148. $5x - 3y + 6 = 0$. 149. $x - y = 0$. 150. $y + 1 = 0$.

152. а) $4x - 5y + 22 = 0$; $4x + y - 18 = 0$; $2x - y + 1 = 0$;
 б) $x + 2y - 7 = 0$; $5x + 4y + 7 = 0$; $x - 4y - 13 = 0$. 153. $y - 17 = 0$;
 $2x + 13 = 0$; $34x - 13y = 0$. 154. $\lambda = -5$; $\mu = -5$;
 $13x + 39y + 5 = 0$. 155. $\frac{4}{5}$; $\frac{14}{5}$; 4. 157. 5. 158. $(0, 6)$; $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$.
 159. $3x + 4y + 30 = 0$; $3x + 4y - 20 = 0$. 160. $x - y = 0$; $x + y - 2 = 0$.
 161. $8x + 14y + 5 = 0$; $7x - 4y = 0$; $\left(-\frac{2}{13}, -\frac{7}{26}\right)$.



Черт. 53.



Черт. 54.

163. $4x - 3y - 22 = 0$; $4x - 3y + 8 = 0$. 164. а) $2x - 5y - 1 = 0$;
 б) $3x + 5y + 5 = 0$. 165. $9x + 9y + 13 = 0$. 166. $2x + y - 7 = 0$;
 $x - 2y - 6 = 0$. 167. $x - 2y - 5 = 0$; $2x - y - 6 = 0$. 168. $x - 7y -$
 $-5 = 0$. 169. Уравнения диагоналей: $x - 2y + 2 = 0$, $2x + y + 4 = 0$.
 Уравнения сторон: $x + 3y + 7 = 0$, $3x - y + 11 = 0$, $3x - y + 1 = 0$.
 Координаты вершин: $(-3, 2)$; $(0, 1)$; $(-1, -2)$; $(-4, -1)$. 170. $(0, -4)$;
 $(-4, 4)$; $(2, 2)$; $(-6, -2)$. 171. $S = \frac{26}{5}$. 172. Два решения:
 а) $C(13, -9)$; $D(8, -4)$; $(AB) x + y + 6 = 0$, $(AD) x - y - 12 = 0$,
 $(DC) x + y - 4 = 0$, $(CB) x - y - 22 = 0$; б) $C'(3, -19)$; $D'(-2, -14)$;
 $(AB) x + y + 6 = 0$, $(AD') x - y - 12 = 0$, $(D'C') x + y + 16 = 0$,
 $(C'B) x - y - 22 = 0$. 173. $x - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$,
 $3x - y + 2 = 0$. 174. Задача имеет два решения: а) $3x + 4y - 11 = 0$;
 б) $9x + 10y - 27 = 0$. 175. $3x - y + 2 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$.
 176. $x - y + 5 = 0$, $3x + y - 5 = 0$, $5x + 3y - 7 = 0$. 177. 1) $(2, 1)$;
 $(0, 5)$; $(1, 6)$; $x - y + 5 = 0$; $5x + y - 11 = 0$; 2) $(2, 1)$; $(-2, 9)$;
 $(3, 2)$; $x - y - 1 = 0$; $7x + 5y - 31 = 0$; 3) $(0, 5)$; $(4, -3)$; $(-1, 10)$;
 $5x + y - 5 = 0$; $13x + 5y - 37 = 0$. 178. Задача имеет четыре реше-
 ния: 1) $\left(x - \frac{144}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{29}{28}\right)^2 = 25$; 2) $\left(x + \frac{3}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{24}{7}\right)^2 = 25$;
 3) $\left(x + \frac{68}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{99}{28}\right)^2 = 25$; 4) $(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 25$.

185. Прямая, перпендикулярная к AB . 187. Прямая, параллельная l .
189. $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$; $\epsilon = \frac{3}{5}$; директрисы: $x = \frac{25}{3}$; $x = -\frac{25}{3}$.
190. а) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$, или $\frac{4x^2}{117} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. 192. $2x - y + 12 = 0$, $2x - y - 12 = 0$. 197. а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.
198. а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. 199. б) $a = 3$; $b = 4$; $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; $\epsilon = \frac{5}{3}$; $x = \pm \frac{9}{5}$; $y = \pm \frac{4}{3}x$.
200. а) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; б) $x^2 - y^2 = 16$; в) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; г) $x^2 - y^2 = 1$.
201. а) $y^2 = 16x$; б) $y^2 = 4x$; в) $x^2 = 25y$; г) $x^2 = -12y$. 202. Постоянная равна b^2 (см. задачу 193). 205. б. 210. Эллипс с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA . Здесь O — центр, A — конец малой оси, а a и b — полуоси данного эллипса. 211. Гипербола с полуосями $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$ и с центром в середине отрезка OA . Здесь O — центр, A — выбранная вершина, а a и b — полуоси данной гиперболы. 212. Гипербола, заданная в выбранной системе уравнением $(1 + \lambda)^2 xy = 2\lambda\sigma$. 214. Если за начало координат принять центр данной окружности, а за ось ординат — прямую l , то г м. т. будет иметь уравнение: $y^2 \pm 2rx - r^2 = 0$, две параболы. 216. Гипербола. 217. Эллипс (одна ветвь гиперболы, парабола). 218. б) $x = x' + 2$, $y = y' + 5$; в) $x = 4x' + y'$, $y = -x' + y'$; г) $x = x' + y' + 2$, $y = 2y'$; д) $x = -x'$, $y = y' - 5$. 219. В примерах б), г) и е) сначала выразить x , y через x' , y' . а) $e_1'\{1, 1\}$, $e_2'\{-3, 1\}$, $O'(0, 1)$; б) $e_1'\{1, 0\}$, $e_2'\{0, 1\}$, $O'(3, -4)$; г) $e_1'\{0, 1\}$, $e_2'\{1, -1\}$, $O'(5, -6)$; е) $e_1'\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$, $e_2'\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$, $O'(0, 0)$. 221. $x = y'$, $y = -x' - y' + 1$.
222. $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{1}{3}$; $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}$.
224. $d = 5$. 226. Гипербола: $2x'^2 - 2y'^2 = 1$. 228. $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $4x'^2 - y'^2 = 1$. Формулы преобразования: $\sqrt{5}x' = 2x + y - \frac{11}{2}$, $\sqrt{5}y' = -x + 2y - 6$. В исходной системе гипербола имеет уравнение: $3x^2 + 4xy - 20x - 4y + 16 = 0$. 229. Задача имеет два решения: а) $4x^2 + 4xy + y^2 - 10y - 15 = 0$, $\rho = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (расстояние от фокуса до директрисы); б) $4x^2 + 4xy + y^2 - 20x + 30y - 15 = 0$, $\rho = \frac{8}{\sqrt{5}}$. 230. Если начало координат перенести в точку $(2, -1)$, то уравнение кривой примет вид: $x'^2 + y'^2 = 6$. 236. в) Пара пересека-

ющихся прямых; г) парабола; д) парабола; е) эллипс: $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4xy + 4y^2) - 1 = 0$. 240. Гипербола: $x'^2 - \frac{1}{4} y'^2 = -1$; $x = x' + \frac{1}{2}$, $y = y' - 3$. 241. Две пересекающиеся прямые: $\sqrt{3}(x+1) + \sqrt{2}(y-1) = 0$, $\sqrt{3}(x+1) - \sqrt{2}(y-1) = 0$; $x = x' - 1$, $y = y' + 1$. 242. Мнимый эллипс: $x'^2 + 2y'^2 = -1$; $x = x' + 2$, $y = y' + 3$. 243. Пара параллельных прямых: $x'^2 - 25 = 0$; $x = x' + 3$, $y = y'$. 244. Эллипс: $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$; $x = x' + 1$, $y = y'$. 245. Гипербола: $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{1} = 1$; $x = x' + 2$, $y = y' - 1$. 246. Пара пересекающихся прямых: $x'^2 - 2y'^2 = 0$; $x = x' - \sqrt{3}$, $y = y' + 5$. 247. Пара мнимых пересекающихся прямых: $2x'^2 + y'^2 = 0$; $x = x'$, $y = y' - 2$. 251. Гипербола: $x'^2 - 2y'^2 = 1$; $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$. 252. Пара параллельных прямых: $x'^2 - 1 = 0$; $10x = \sqrt{2}x' + 7\sqrt{2}y'$; $10y = -7\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'$. 253. Парабола: $y'^2 = x'$; $2x' = \sqrt{3}x - y$, $2y' = x + \sqrt{3}y$. 254. Мнимый эллипс: $x'^2 + \frac{y'^2}{4} = -1$; $2x = \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'$, $2y = \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'$. 255. Эллипс: $x'^2 + 2y'^2 = 1$; $5x' = 4x - 3y$, $5y' = 3x + 4y$. 256. Парабола: $y'^2 = 2x'$, $5x' = 4x - 3y$, $5y' = 3x + 4y$. 257. Гипербола: $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{4} = 1$; $\sqrt{5}x' = x - 2y$, $\sqrt{5}y' = 2x + y$. 258. Пара слившихся прямых: $x'^2 = 0$; $2x' = \sqrt{2}(x+y)$, $2y' = \sqrt{2}(x-y)$. 259. Пара пересекающихся прямых: $x'^2 - y'^2 = 0$; $6x' = x + \sqrt{35}y$, $6y' = -\sqrt{35}x + y$. 263. Парабола: $\tilde{y}^2 = 2\tilde{x}$; $5\tilde{x} = -4\tilde{x} + 3\tilde{y} + 18$, $5\tilde{y} = -3\tilde{x} + 4\tilde{y} + 1$. 264. Пара параллельных прямых: $\tilde{x}^2 - 2 = 0$; $5\tilde{x} = 3x - 4y - 5$; $5\tilde{y} = 4x + 3y$. 265. Пара пересекающихся прямых: $\tilde{x}\tilde{y} = 0$; $2\tilde{x} = \sqrt{3}x - y - 2$, $2\tilde{y} = x + \sqrt{3}y$. 266. Эллипс: $\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = 1$; $\sqrt{5}\tilde{x} = x - 2y + 1$, $\sqrt{5}\tilde{y} = 2x + y$. 267. Парабола: $\tilde{y}^2 = 3\tilde{x}$; $\sqrt{10}\tilde{x} = x + 3y - 3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}\tilde{y} = -3x + y$. 268. Пара мнимых пересекающихся прямых: $\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 = 0$; $\sqrt{13}\tilde{x} = 3x - 2y + 5$, $\sqrt{13}\tilde{y} = 2x + 3y - 4$. 269. Пара слившихся прямых: $\tilde{x}^2 = 0$; $5\tilde{x} = -4x + 3y + 11$, $5\tilde{y} = -3x - 4y + 5$. 270. (1, 1), (2, 0). 273. а) $k_1 = 4$, $k_2 = 1$; б) $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$; в) нет асимптотических направлений; г) $\alpha_1 = 0$, β_1 — произвольно, $k_2 = \frac{1}{2}$; д) $k_1 = k_2 = 0$. 274. б) $2x - 3y + 1 = 0$ и $x - 1 = 0$; в) $6x + 14y + 11 = 0$ и $2x + 2y - 1 = 0$; г) асимптот нет. 277. а) $a_{11} = 0$; б) $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$; в) $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$. 278. $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$. 280. а) (3, -2); б) нет центров; в) линия центров: $x - y - 3 = 0$. 284. а) $a \neq 9$; б) $a = 9$, $b \neq 9$; в) $a = 9$, $b = 9$. 286. $x - 1 = 0$, $x = 2y + 3 = 0$. 288. а) Па-

рабoла; б) пара параллельных или слившихся прямых; в) существует вектор $\{\alpha, \beta\}$ не асимптотического направления, координаты которого удовлетворяют условиям: $\alpha a_{11} + \beta a_{21} = 0$; $\alpha a_{13} + \beta a_{23} = 0$.

289. $a_2' \{-2, 1\}$; $a_3' \{3, 1\}$; $a_4' \{-1, 2\}$. 290. $k=0$. 291. в) $\{1, 1\}$, $\{1, -1\}$; г) $\{1, -2\}$, $\{2, 1\}$; д) $\{1, 1 + \sqrt{2}\}$, $\{1, 1 - \sqrt{2}\}$. 292. а) $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$; б) $2x - 4y - 5 = 0$; в) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$; г) $2x - 4y - 1 = 0$; д) $7(1 + \sqrt{2})x - 7y - 18 - 13\sqrt{2} = 0$, $7(1 - \sqrt{2})x - 7y - 18 + 13\sqrt{2} = 0$. 294. $a_{11} = a_{22}$; $a_{12} = 0$. 298. $\overline{CS} \{-2, 0, 2\}$, $\overline{AC} \{4, 2, 0\}$, $\overline{CA'} \{-3, -1, 1\}$, $\overline{O'A} \{-2, -2, -1\}$, $\overline{AS} \{2, 2, 2\}$, $\overline{AC'} \{3, 2, 1\}$, $\overline{BE'} \{0, -\frac{5}{2}, 1\}$, $\overline{AE'} \{2, 2, 1\}$. 299. $\overline{CS} \{2, -4, -2\}$, $\overline{AC} \{-4, 4, 0\}$, $\overline{CA'} \{3, -4, -1\}$, $\overline{O'A} \{2, 0, 1\}$, $\overline{AS} \{2, 0, -2\}$, $\overline{AC'} \{-3, 2, -1\}$, $\overline{BE'} \{0, 5, -1\}$, $\overline{AE'} \{-2, 0, -1\}$. 303. $p_1 \{2, 5, 0\}$, $p_2 \{-1, 2, 4\}$, $p_3 \{5, 5, -2\}$, $p_4 \{1, 2, -2\}$, $p_5 \{1, 2, \frac{3}{2}\}$, $p_6 \{1, \frac{1}{3}, -4\}$. 309. $D(6, 5, 7)$.

311. а) $A_1(-2, -3, 1)$, $B_1(-3, 0, 1)$, $C_1(-1, -1, -1)$; б) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(3, 0, 1)$, $C_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, -3, -1)$, $B_2(3, 0, -1)$, $C_2(1, -1, 1)$, $A_3(-2, 3, -1)$, $B_3(-3, 0, -1)$, $C_3(-1, 1, 1)$; в) $A_1(2, -3, 1)$, $B_1(3, 0, 1)$, $C_1(1, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 1)$, $B_2(-3, 0, -1)$, $C_2(-1, 1, -1)$, $A_3(-2, -3, -1)$, $B_3(-3, 0, -1)$, $C_3(-1, -1, 1)$. 313. $A_1A_2 = 5$, $B_1B_2 = \sqrt{50}$, $C_1C_2 = \sqrt{30}$; $OM = 5$, $ON = \sqrt{13}$, $OP = 5$, $OQ = \sqrt{62}$.

314. $r = \sqrt{26}$. 315. 7. 316. $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$, $r = \frac{1}{6}\sqrt{107}$. 317. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$, $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$. 318. $A_1(0, -3, 8)$; $A_2(\frac{1}{2}, -2, 5)$; $A_4(\frac{3}{2}, 0, -1)$; $A_6(\frac{5}{2}, 2, -7)$. 319. $C(7, -3, -2)$. 327. а) -12 ; б) 2; в) 6; г) -49 ; д) 89. 329. а) $\frac{15}{2\sqrt{91}}$; б) $\frac{2}{15}$; в) 0. 330. 30° , 60° , 90° . 334. $\overline{BH} \{-3, -3, 1\}$, $\sqrt{19}$. 335. $\overline{OH} \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\}$. 336. $x \{-4, -6, 4\}$. 338. $\{\frac{19}{15}, \frac{22}{15}, \frac{1}{3}\}$. 341. 45° . 343. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 345. а) $\{3, 0, -2\}$; б) $\{-2, 0, 0\}$; в) $\{-3, 9, 5\}$; г) $\{3, 0, 1\}$; д) $\{-3, 0, -1\}$; е) $\{-13, 4, 10\}$. 346. а) $\{-6, 6, -1\}$; б) $\{-1, 5, 2\}$. 349. а) $\{15, -3, -14\}$; б) $\{0, 0, 0\}$; в) $\{-3, 11, 9\}$. 351. а) левая; б) правая; в) левая; г) левая; д) левая. 354. $abc = -29(ijk)$; $b(a \times c) = 29(ijk)$. 360. $AH = 3$. 361. а) $V = 12$; б) $S_{ABCD} = 2\sqrt{26}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{626}$, $S_{ADD'A'} = \sqrt{338}$; в) $h = \frac{6}{\sqrt{26}}$; г) $\cos \varphi_1 = \frac{4}{5\sqrt{10}}$; д) $\cos \varphi_2 = \frac{46}{13\sqrt{13}}$. 362. а) $V = \frac{17}{2}$; б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{34}$, $S_{ACC'A'} = \sqrt{357}$, $S_{BCC'B'} = \sqrt{561}$; в) $h = \sqrt{17}$; г) $\cos \varphi = 0$.

$$363. \text{ а) } V = \frac{8}{3}; \text{ б) } S_{ABC} = 4, S_{ACD} = 5, S_{ABD} = 2\sqrt{5}, S_{BCD} = \sqrt{33};$$

$$\text{в) } h = 2; \text{ г) } \cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}; \text{ д) } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. 364. \text{ а) } S = \sqrt{51}; \text{ б) } \cos A =$$

$$= \frac{7}{10}, \cos B = -\frac{3}{2\sqrt{15}}, \cos C = \frac{18}{5\sqrt{15}}; \text{ в) } BH = \frac{\sqrt{102}}{5},$$

$$\overline{BH} \left\{ -\frac{29}{25}, \frac{7}{5}, \frac{22}{25} \right\}; \text{ г) } a \{8, 5, -9\}; \text{ д) } M \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0 \right).$$

$$365. \text{ а) } S = \frac{75}{2}; \text{ б) } \cos A = 0, \cos B = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos D = 0;$$

$$\text{в) } a \{-3, 4, 5\}; \text{ г) } \overline{BH} \left\{ 6, -\frac{28}{3}, -\frac{10}{3} \right\}; \text{ д) } M \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{2} \right).$$

$$366. S = 2\sqrt{2}; h \{t, t, 0\}. 367. \text{ а) да; б) нет: } a \times b = -(b \times a).$$

$$368. \text{ Нет; а) например: } a \neq 0, b \neq 0, a \perp b; \text{ б) например: } a \neq 0, b \neq 0,$$

$$a \parallel b. 371. \text{ Если } b \perp a, \text{ то все решения уравнения параллельны плоскости,}$$

$$\text{перпендикулярной к вектору } b. \text{ Если } a \text{ и } b \text{ не перпендикулярны, то}$$

$$\text{данное уравнение не имеет решений. 373. Если } p = a \times b, \text{ то данное}$$

$$\text{уравнение сводится к следующему: } px = a, \text{ см. задачу 369. 374. Нет.}$$

$$375. \text{ Да. 376. Нет. 377. Нет. 388. Если } M \text{ и } M' \text{ — середины двух}$$

$$\text{противоположных ребер, длины которых равны } a \text{ и } a', a, b, c, b', c' \text{ —}$$

$$\text{длины остальных четырех ребер, то } MM'^2 = \frac{1}{4} (b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 -$$

$$- a^2 - a'^2). 389. \frac{1}{12}. 390. \frac{1}{3}. 392. (1, 0, 4). 394. \text{ а) } x - 2y + z = 0;$$

$$\text{б) } y - z = 0; \text{ в) } x + 3y - z + 1 = 0; \text{ г) } x - z + 1 = 0. 395. ABC:$$

$$z = 0; ABD: y = 0; ACD: x = 0; BCD: x + y + z = 1; CDE: 2x +$$

$$+ y + z = 1. 396. \text{ а) нет; б) да: } x + y + z - 2 = 0; \text{ в) нет; г) нет.}$$

$$397. \text{ а) } 10x + 9y + 5z - 50 = 0; \text{ б) } 6x + 5y + 3z - 30 = 0. 398. \text{ а) Па-}$$

$$\text{раллельна оси } Oy; \text{ б) проходит через начало координат; в) парал-}$$

$$\text{лельна оси } Oz; \text{ г) содержит ось } Oy; \text{ д) параллельна плоскости } Oyz;$$

$$\text{е) параллельна оси } Ox. 400. 3y + 2z = 0; 3x - z = 0; 2x + y = 0.$$

$$401. \text{ а) } a = -2, b = \frac{1}{3}, c = -1; \text{ б) } a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}, c = -3.$$

$$403. \frac{x}{-3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{1} = 1. 404. x + y + z = 9; -x + y + z = 3;$$

$$x - y + z = 5; x + y - z = 1. 406. \text{ Векторы } p_2 \text{ и } p_4 \text{ параллельны,}$$

$$\text{а } p_1 \text{ и } p_3 \text{ не параллельны данной плоскости. 409. } x - 6y + 11 = 0;$$

$$3x - 6y + 4z - 7 = 0; x + 2z - 9 = 0. 410. x + 3y - 3z - 9 = 0.$$

$$411. \text{ а) } \{1, 2, -1\}; \text{ б) } \{1, 0, -3\}; \text{ в) } \{0, 1, 0\}; \text{ г) } \{1, -3, 1\}.$$

$$413. \text{ а) } -7x + y + 5z = 0; \text{ б) } 3x + y - 2z - 8 = 0. 415. \text{ а) } 2x -$$

$$- 4y + 5z = 0; \text{ б) } 2y - 7z = 0; \text{ в) } x = 0. 416. \text{ а) } 3x - y + z - 11 = 0;$$

$$\text{б) } x - 3y - 10 = 0; \text{ в) } z - 5 = 0. 418. \text{ а) На линии пересечения ле-}$$

$$\text{жит, например, точка } (1, -2, -4); \text{ б) } p \{-1, 3, 5\}. 419. (2, 1, 1).$$

$$423. \left(-\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{13}{11} \right). 426. \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0. 428. -66x +$$

$$+ 61y + 89z - 134 = 0, x - 3y - z + 1 = 0, 14x + 95y - 37z - 82 = 0.$$

429. а) $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; б) $21x + 14z - 3 = 0$. 430. $5x + 3y - z + 4 = 0$. 431. $x - 11y + 25z - 5 = 0$. 433. а) $p = 10$;
 б) $p = \frac{3}{\sqrt{38}}$. 435. $6x + 2y + 3z - 42 = 0$. 436. $4x + 3y - 15 = 0$,
 $58x + 33y + 6z - 201 = 0$. 437. $\rho = \frac{1}{2\sqrt{14}}$. 439. а) 8; б) $\frac{1}{2}$; в) $9\sqrt{3}$;
 г) $\frac{26\sqrt{3}}{9}$. 440. $M_1(0, 0, 3\sqrt{5})$, $M_2(0, 0, -3\sqrt{5})$. 441. $M_1(0, 3, 0)$,
 $M_2(0, -2, 0)$. 442. $2x - y + 2z + 6 = 0$, $2x - y + 2z - 12 = 0$.
 443. а) $4x - 2y + 6z - 9 = 0$; б) $x + y - 2z + 2 = 0$; в) $3x - y + z + 10 = 0$.
 444. а) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; б) $\alpha = 90^\circ$. 445. $x + 2y - 6z + 3 = 0$,
 $4x + y + z - 1 = 0$. 447. а) (3, 4, 5); б) (-22, -1, -20).
 449. а) $x = -t$, $y = 0$, $z = t$; б) $x = t$, $y = t + 1$, $z = -3t - 1$;
 в) $x = 0$, $y = -t$, $z = t$. 450. а) (0, 1, 0); б) (0, 2, 1), $\left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$,
 (-2, -1, 0). 452. а) Совпадают; б) скрещиваются; в) параллельны.
 453. $5x - 22y + 19z + 9 = 0$. 454. $y + z = 0$. 455. а) $x + 2y - 1 = 0$;
 б) $x + 2y + z + 4 = 0$. 456. $2x - y + z + 12 = 0$. 457. $x - 4y + 7z + 24 = 0$.
 459. $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$. 460. $\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. 462. $\frac{x+5}{0} =$
 $= \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$. 463. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-3}{4}$. 464. а) $2x - 3y + 5z - 31 = 0$;
 б) $2x - 5y - 3z - 5 = 0$. 465. $\begin{cases} 3x + 4y + 3z - 15 = 0, \\ 7x - 6y + z + 5 = 0. \end{cases}$ 466. $\frac{x-1}{-5} =$
 $= \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{8}$. 467. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+1}{9}$. 469. а) $x + 2y + 9 = 0$,
 $\begin{cases} x + 2y + 9 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $x - 2z - 1 = 0$, $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $y + z + 5 = 0$,
 $\begin{cases} y + z + 5 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ б) $x - 4y - 6 = 0$, $\begin{cases} x - 4y - 6 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $z + y - 1 = 0$,
 $\begin{cases} z + y - 1 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ $x + 4z - 10 = 0$, $\begin{cases} x + 4z - 10 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$ 470. $\begin{cases} 3y + 3z + 5 = 0, \\ 3x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$
 471. $\begin{cases} 2x + y - 5z + 5 = 0, \\ 3x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 473. $2x + 3y - 5z + 14 = 0$.
 474. $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x - 11y - 3z - 44 = 0. \end{cases}$ 475. $\sqrt{22}$. 476. 6. 477. б) $2x - 3y -$
 $- 6z - 7 = 0$, $2x - 3y - 6z + 14 = 0$; в) 3. 478. $\arcsin \frac{3}{133}$. 479. 90° .
 480. $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$. 489. Прямая, перпендикулярная к плоскости
 треугольника. 495. $\cos \varphi = \frac{3h^2 - 2a^2}{\sqrt{3h^2 + 4a^2} \sqrt{12h^2 + a^2}}$. 500. $\frac{\sqrt{6}}{3} a$.
 502. а) $x' = x - \frac{1}{2}y + 7z$, $y' = \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z$, $z' = 2z$; б) $x' = x + 2y - 5$,

$y' = x + y - 5$, $z' = \frac{1}{5}z + \frac{2}{5}$; в) $x' = -x + 1$, $y' = y - 1$, $z' = -z + 2$; г) $x' = x - 2$, $y' = y - 5$, $z' = z + 1$. 503. а) $e'_1\{1, 1, 1\}$, $e'_2\{-3, 1, 0\}$, $e'_3\{1, 0, 0\}$, $O'(0, 0, 1)$; б) $e'_1\{1, 0, 0\}$, $e'_2\{0, 1, 0\}$, $e'_3\{0, 0, 1\}$, $O'(-1, 3, 0)$; в) $e'_1\{1, -1, 0\}$, $e'_2\{-1, -1, 0\}$, $e'_3\{1, 2, 1\}$, $O'(1, 2, -3)$; г) $e'_1\{0, 1, 1\}$, $e'_2\{1, 0, 1\}$, $e'_3\{0, 0, 1\}$, $O'(0, 0, 1)$; д) $e'_1\{-1, 0, 0\}$, $e'_2\{0, -1, 0\}$, $e'_3\{0, 0, 1\}$, $O'(1, 1, 1)$. 505. $x' = -x - y - z + 1$, $y' = y$, $z' = z$. 506. Нет, так как определитель системы равен нулю. 507. а), в), г). 508. Да. 509. $x' = \sqrt{2}x$, $y' = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$, $z' = -x - y + z$. 510. $3x'^2 + 6y'^2 - 2z'^2 = 0$ — коническая поверхность. 511. $3x'^2 + y'^2 - 2x'z' + 2 = 0$. 513. Начало координат перенести в точку поверхности; это возможно в том и только в том случае, когда поверхность имеет хотя бы одну действительную точку. 514. $z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}$. 516. Нет. 517. а) и в) — гиперболический параболоид; б) $(x + y)^2 + y^2 + \left(z^2 + z + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 0$ — эллипсоид; г) коническая поверхность. 521. $\frac{x'^2}{14} + \frac{y'^2}{28} + \frac{z'^2}{7} = 1$. 522. $\frac{x'^2}{2} + \frac{z'^2}{1} = -2y'$. 523. $\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 2z'$. 524. $-\frac{x'^2}{2} + \frac{z'^2}{1} = 2y'$. 525. $x'^2 - y'^2 + z'^2 = 0$. 526. $x'^2 - 3y'^2 = 0$. 527. $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{5} = -1$. 528. $x'^2 - 5 = 0$. 533. $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1$; ($\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = 6$; $\lambda_3 = -2$), $x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'$. 534. $z^2 - 4 = 0$; ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$), $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z'$. 535. $y'^2 - z'^2 = 1$; ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -6$), $x = \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $y = \frac{2}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z'$. 536. $\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{9} - \frac{z'^2}{3} = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z = z'$. 537. $5y'^2 + 2\sqrt{13}x' = 0$, $x = \frac{2x' + 3z'}{\sqrt{13}}$, $y = y'$, $z = \frac{3x' - 2y'}{\sqrt{13}}$. 538. $\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} = 1$, $x + y = x'\sqrt{2}$, $x - y + z = y'\sqrt{3}$, $x - y - 2z = z'\sqrt{6}$. 539. $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{6} = 1$, ($\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$); $x - y + z = x'\sqrt{3}$, $x - y - 2z = y'\sqrt{6}$, $x + y = z'\sqrt{2}$. 540. $3z'^2 = 4$, ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$); $x + y = x'\sqrt{2}$, $x - y -$

$-2z = \sqrt{6}y'$, $x - y + z = \sqrt{3}z'$. 544. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{32}{5}} + \frac{z^2}{4} = 1$ — эллипсоид ($\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = 8$). 545. $x^2 + z^2 = 2y$ — параболоид вращения. 546. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ — эллиптический цилиндр. 547. $y^2 = 2\frac{1}{\sqrt{5}}z$ — параболический цилиндр. 548. $-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{6} = 1$ — двуполостный гиперболоид. 549. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{1} = 0$ — коническая поверхность. 550. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1$. 552. $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 8yz + 4xz + 16x + 14y + 22z - 39 = 0$. 554. $27[(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2] = 4(2x + 2y - z - 3)^2$. 555. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{5} = 1$. 556. $y^2 + z^2 = 6x$. 558. $xz + 2y - 2z = 0$. 559. $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$. 560. b и d . 562. $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - z + 2 = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$ 564. а) Нет; б) $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$. 565. а) $a_{11} = 0$, $a_{22}a_{33} > 0$; б) $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{33} > 0$ или $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{33} < 0$. 567. а) Плоскость, параллельная данным плоскостям; б) пара пересекающихся плоскостей; в) одна прямая, имеющая асимптотическое направление. 569. а) $(1, 1, -1)$; б) $(0, 2, -2)$ 570. а) Прямая центров: $3x - 2y = 0$, $y - 3z + 6 = 0$, поверхность третьего типа: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a_{44}' = 0$; б) нет центров, поверхность второго типа; в) единственный центр $(0, 0, 0)$, принадлежащий поверхности; поверхность коническая; г) плоскость центров $4x + 4y - 4z + 5 = 0$, поверхность пятого типа: $\lambda_1 x'^2 + a_{44}' = 0$. 572. а) $O'(1, -1, 1)$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $\frac{\tilde{x}^2}{6} - \frac{\tilde{y}^2}{4} - \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1$; б) $O'\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -6$, $2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - 6\tilde{z}^2 + \frac{4}{3} = 0$. 574. $a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. 578. $x + 3y + 2z + 2 = 0$. 579. $x - y - z = 0$. 580. $10x - 7y - 17z - 20 = 0$. 581. $38x + 39y - 20z - 1 = 0$. 582. $4x - y - 4z + 1 = 0$. 583. б) Да; например, пара параллельных плоскостей; в) все диаметральные плоскости проходят через линию пересечения данных плоскостей, 585. б) $a_{13} = a_{12} = 0$; в) $a_{11} = a_{22}$; $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. 587. Главные диаметральные плоскости: а) $2x + 2y - 1 = 0$, $3x - 3y + 3z - 4 = 0$. $6x - 6y - 12z - 7 = 0$; б) $4x + y + 2z + 7 = 0$, $x - 2y - z + 5 = 0$; в) $x - z - 1 = 0$, $x - y + z = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Учебники и учебные пособия

1. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иванецкая В. П., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1958¹⁾.
2. Лопшиц А. М., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, 1948.
3. Моденов П. С., Аналитическая геометрия, Издательство Московского университета, 1955.
4. Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, Физматгиз, 1960.
5. Дзюбек О., Курс аналитической геометрии, ч. I и II, Одесса, 1911.
6. Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, ч. I, Гостехиздат, 1939.
7. Минорский В. П. и Улановский В. П., Векторная алгебра, Гостехиздат, 1951.
8. Гольдфайн И. А., Элементы векторного исчисления, Гостехиздат, 1948.
9. Выгодский М. Я., Справочник по высшей математике, изд. 6, Физматгиз, 1962.

II. Задачники

10. Адамов А. А., Сборник задач по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению, Государственное издательство, 1924.
11. Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б., Ильин А. С., Козьмина Т. Л., Редозубова О. С., Сборник задач по элементарной геометрии, Учпедгиз, 1958.
12. Бахвалов С. В., Моденов П. С. и Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, Гостехиздат, 1957.
13. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, Гостехиздат, 1957.
14. Клетеник Д. В., Сборник задач по аналитической геометрии, Физматгиз, 1960.

¹⁾ Недавно вышло из печати второе, переработанное издание учебника (Учпедгиз, 1962). В тексте задачника ссылки даны по первому изданию, однако можно пользоваться также и вторым изданием.

15. Скопец З. А., Жаров В. А., Задачи и теоремы по элементарной геометрии, Учпедгиз, 1962.

16. Цубербиллер О. Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии, Физматгиз, 1961.

III. Методические пособия для студентов-заочников педагогических институтов

17. Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П., Общая теория линий второго порядка, Учпедгиз, 1956.

18. Иваницкая В. П., Общая теория поверхностей второго порядка, Учпедгиз, 1958.

19. Каченовский М. И., Методические указания и контрольные работы по аналитической геометрии, Учпедгиз, 1956.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	3
--	---

Часть первая

Аналитическая геометрия на плоскости

Глава I. Аффинные действия над векторами на плоскости и в пространстве

§ 1. Сложение и вычитание векторов	6
§ 2. Умножение вектора на число; смешанные задачи . .	10
§ 3. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии	13

Глава II. Координаты векторов и точек на плоскости

§ 4. Координаты векторов и их свойства	17
§ 5. Координаты точек; решение простейших задач в координатах	21
§ 6. Полярные координаты	28
§ 7. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии	31

Глава III. Уравнение геометрического места точек на плоскости

§ 8. Составление уравнения геометрического места то- чек; исследование геометрического места по уравне- нию	37
§ 9. Задачи на геометрические места точек, приводящие к окружности	41
§ 10. Некоторые замечательные кривые	46

Глава IV. Прямая на плоскости

§ 11. Составление уравнения прямой по различным заданиям; построение прямой по уравнению . . .	53
§ 12. Взаимное расположение прямых	60
§ 13. Расстояние от точки до прямой; угол между прямыми	65
§ 14. Смешанные задачи на прямую	69
§ 15. Приложение теории прямой к решению задач элементарной геометрии	70

Глава V. Изучение кривых второго порядка по каноническим уравнениям

§ 16. Эллипс	77
§ 17. Гипербола и парабола	81
§ 18. Задачи на геометрические места, приводящие к эллипсу, гиперболе и параболе	86

Глава VI. Преобразование системы координат на плоскости

§ 19. Формулы преобразования координат точек . . .	91
§ 20. Изменение уравнения геометрического места при преобразовании координат точек	94

Глава VII. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

§ 21. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем параллельного переноса системы координат . .	101
§ 22. Упрощение уравнения кривой второго порядка путем вращения системы координат	103
§ 23. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду	108

Глава VIII. Изучение геометрических свойств кривых второго порядка по общему уравнению

§ 24. Пересечение с прямой; асимптотические направления и асимптоты	114
§ 25. Центр и диаметры	117
§ 26. Сопряженные направления; главные направления и главные диаметры	119

Аналитическая геометрия в пространстве

Глава IX. Координаты векторов и точек в пространстве

§ 27. Координаты векторов и их свойства	122
28. Координаты точек; решение простейших задач в координатах	126
§ 29. Приложение метода координат к решению задач элементарной геометрии	129

Глава X. Произведения векторов

§ 30. Скалярное произведение векторов	132
§ 31. Векторное и смешанное произведения векторов . .	136
§ 32. Свойства произведений векторов, отличные от свойств произведения чисел	142
§ 33. Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии	145

Глава XI. Плоскость и прямая в пространстве

§ 34. Составление уравнения плоскости по различным заданиям	150
§ 35. Взаимное расположение плоскостей	156
§ 36. Расстояние от точки до плоскости; угол между плоскостями	161
§ 37. Уравнения прямой; задачи на сочетание прямых и плоскостей	165
§ 38. Метрические задачи на сочетание прямых и плоскостей	171
§ 39. Аналитическое доказательство некоторых стереометрических теорем	175
§ 40. Приложение теории прямой и плоскости к решению задач элементарной геометрии	178

Глава XII. Преобразование системы координат в пространстве

§ 41. Формулы преобразования координат точек . . .	183
42. Изменение уравнения геометрического места при преобразовании координат точек	187

Глава XIII. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

§ 43. Упрощение уравнения поверхности второго порядка путем параллельного переноса системы координат	191
§ 44. Упрощение уравнения поверхности второго порядка путем вращения системы координат	193
§ 45. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду	199

Глава XIV. Изучение геометрических свойств поверхностей второго порядка по общему уравнению

§ 46. Составление уравнений поверхностей второго порядка	205
§ 47. Пересечение поверхности с прямой; асимптотические направления	208
§ 48. Центр поверхности	212
§ 49. Диаметральные плоскости	214
§ 50. Главные направления; главные диаметральные плоскости	219
О т в е т ы	223
Список литературы	234

Левон Сергеевич Атанасян

Задачник-практикум по аналитической геометрии

Редакторы *А. З. Рывкин* и *Г. С. Уманский*
Технический редактор *М. С. Дранникова*
Корректоры *Н. А. Мясникова* и *Н. П. Кононова*

* * *

Сдано в набор 31/X 1962 г. Подписано к печати 27/III 1963 г.
84×108¹/₃₂. Печ. л. 15 (12,3). Уч.-изд. л. 9,83. Тираж 30 тыс. экз.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Полиграфкомбинат Приволжского совнархоза,
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Заказ 220.

Цена 27 коп.

Цена 27 коп.